*Psychologia Społeczna*
*2010 tom 5 2–3 (14) 162–190*

ISSN 1896-1800

# Analiza interakcji zmiennych kategorialnych i ciągłych

Tytus Sosnowski
*Wydział Psychologii, Uniwersytet Warszawski*

Artykuł jest poświęcony analizie interakcji zmiennych kategorialnych i ciągłych. W jego pierwszej części omówiono interakcję zmiennych kategorialnych przy użyciu analizy wariancji (*analysis of variance* – ANOVA) i wielokrotnej (wielorakiej) analizy regresji (*multiple regression analysis* – MR), w drugiej części – interakcję zmiennej kategorialnej i ciągłej przy użyciu MR, w trzeciej zaś – interakcję zmiennych ciągłych przy użyciu MR wraz z analizą danych scentrowanych. Każdą część pracy zilustrowano analizą przykładowych (fikcyjnych) danych liczbowych, przeprowadzoną przy użyciu pakietu statystycznego SPSS i, częściowo, pakietu STATISTICA. Dla uproszczenia problemu, rozważania teoretyczne i analizę danych liczbowych ograniczono do modeli z dwiema zmiennymi niezależnymi.

*Słowa kluczowe:* analiza wariancji, interakcja, wielokrotna analiza regresji, zmienna ciągła, zmienna kategorialna

Analizując jednoczesny wpływ kilku zmiennych niezależnych na zmienną zależną, możemy spotkać się z ich interakcją. Interakcja może zachodzić między zmiennymi kategorialnymi, między zmiennymi ciągłymi, jak też między obydwoma rodzajami zmiennych. Sens pojęcia interakcja pozostaje we wszystkich tych przypadkach taki sam – oznacza ono, że wpływ jednej zmiennej niezależnej na zmienną zależną zmienia się w zależności od poziomu drugiej zmiennej niezależnej (lub innych zmiennych niezależnych, gdyby było ich w modelu więcej niż dwie). Rodzaj zmiennych pozostających w interakcji, wpływa natomiast na sposób analizy danych.

## Interakcja zmiennych kategorialnych

### Interakcja jako nierówność efektów prostych

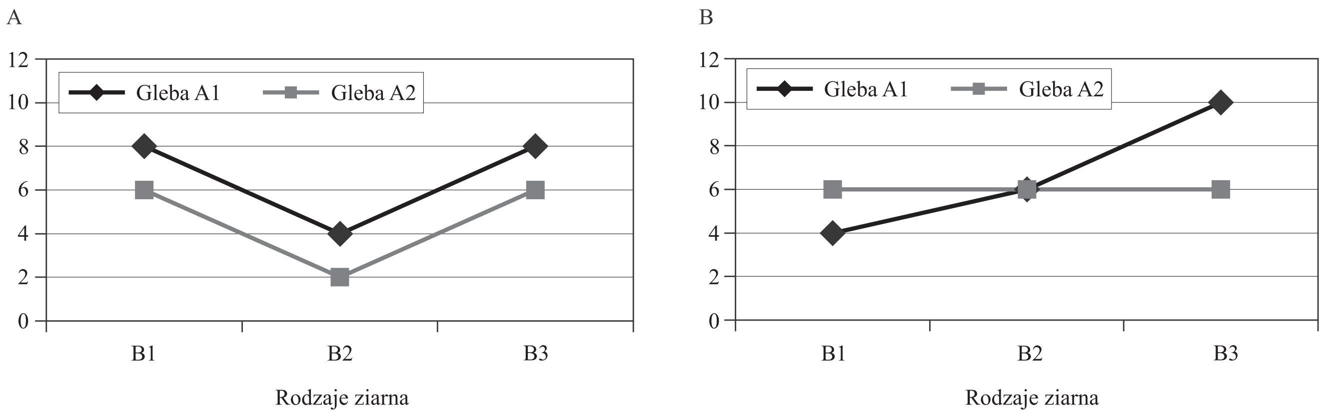
Przez zmienną kategorialną rozumiemy zmienną przybierającą niewielką liczbę wartości, pozwalającą podzielić badane obiekty na grupy, przy czym podział ten powinien być rozłączny, a jeśli to możliwe – wyczerpujący. Zmienną kategorialną jest często zmienna mierzona na skali nominalnej, nazywana wtedy zmienną nominalną. W badaniach eksperymentalnych lub quasi-eksperymentalnych zmienne niezależne (czynniki eksperymentalne) są zwykle zmiennymi kategorialnymi. Wyobraźmy sobie eksperyment w układzie 2 × 3, w którym badamy wpływ dwóch rodzajów gleby (A1 i A2) oraz trzech odmian ziarna (B1, B2 i B3) na wielkość plonów (Y). Część A Rysunku 1 prezentuje fikcyjne wyniki (średnie grupowe) takiego badania, w którym nie wystąpiła interakcja zmiennych niezależnych, natomiast część B – wyniki badania, w którym interakcja wystąpiła. Dla ułatwienia analizy tych danych przyjmijmy upraszczające założenie, że wszystkie różnice widoczne na rysunku są istotne statystycznie.

W tradycyjnej analizie wariancji efekt interakcji definiowany jest jako nieaddytywność sum kwadratów związanych z czynnikami eksperymentalnymi. Może się zdarzyć, że w eksperymencie dwuczynnikowym A × B suma kwadratów między grupami ($SS_{mg}$) będzie równa sumie sum kwadratów związanych z czynnikiem A i z czynnikiem B:

$$SS_{mg} = SS_A + SS_B \quad (1)$$

Oznacza to, że łączne oddziaływanie obu czynników jest prostą sumą ich oddziaływań lub – mówiąc inaczej – że efekty czynników A i B są addytywne. Może się jednak zdarzyć i tak, że lewa strona równania okaże się większa od prawej. Dla uzyskania równości obu stron równania musimy wówczas uwzględnić dodatkowy jego

Tytus Sosnowski, Wydział Psychologii, Uniwersytet Warszawski, ul. Stawki 5/7, 00–183 Warszawa,
e-mail: tytus@psych.uw.edu.pl
Praca została sfinansowana z funduszów projektu badawczego BST 144503/2009.




*Rysunek 1.*
Układ średnich w fikcyjnych eksperymentach, ilustrujący brak interakcji (A) i interakcję (B) czynników eksperymentalnych.

składnik: sumę kwadratów związaną z interakcją obu czynników ($SS_{A\times B}$):

(2) $$SS_{mg} = SS_A + SS_B + SS_{A\times B}$$

Choć równanie (2) dobrze definiuje interakcję, definicja taka jest mało intuicyjna. Ponadto, interakcji rozumianej jako nieaddytywność nie można przypisać interpretacji merytorycznej bez przeprowadzenia dalszych analiz, tj. analizy efektów prostych. Jeśli zaś któryś z czynników ma więcej niż dwa poziomy, konieczna jest dodatkowo analiza kontrastów. Dopiero efekty proste i kontrasty możemy interpretować merytorycznie (np. w kategoriach psychologicznych). Interakcję można jednak zdefiniować w inny sposób – za pomocą efektów głównych i efektów prostych.

**Definiowanie efektów zmiennych kategorialnych**

Pojęcie efektu zmiennej niezależnej jest różnie definiowane w różnych modelach statystycznych. Do wstępnych rozważań wystarczy bardzo prosta definicja efektu jako różnicy między dwiema średnimi grupowymi. Na przykład, miarą efektu rodzaju gleby może być różnica między średnim poziomem plonów uzyskanych na glebie A1 i na glebie A2. Efekt prosty (*simple effect*) danej zmiennej definiuje się jako jej efekt zachodzący dla określonego poziomu drugiej zmiennej (lub dla określonej kombinacji innych zmiennych, gdybyśmy mieli w modelu więcej niż dwie zmienne niezależne). Efekt prosty bywa też nazywany efektem warunkowym (*conditional effect*). Jest to bardzo trafne określenie, gdyż mówimy tu o efekcie zmiennej niezależnej, zachodzącym pod warunkiem, że druga zmienna niezależna przybiera określoną wartość. Efekt główny (*main effect*) zmiennej to, z kolei, jej efekt uśredniony po wszystkich wartościach drugiej zmiennej (lub po wszystkich wartościach pozostałych zmiennych, gdyby model uwzględniał więcej niż dwie zmienne niezależne).

W przypadku danych przedstawionych w części A Rysunku 1 możemy wyróżnić trzy efekty proste zmiennej A (rodzaju gleby): pierwszy zachodzący dla rodzaju ziarna B1 (możemy go oznaczyć symbolem $\alpha_1$), drugi dla ziarna B2 ($\alpha_2$) i trzeci dla ziarna B3 ($\alpha_3$). Jak widać na rysunku, wszystkie te trzy efekty proste zmiennej A są równe. Wskutek tego, linia łącząca plony trzech rodzajów ziarna na glebie A1 i linia łącząca takież plony na glebie A2 są równoległe. Taki przypadek, czyli równość wszystkich efektów prostych, jest równoznaczny z brakiem interakcji między zmiennymi. Jeśli wszystkie efekty proste są równe, to tym samym są równe efektowi głównemu (czyli – średniej różnicy między zbiorami uzyskanymi na glebie A1 i na glebie A2). W takim wypadku nie ma potrzeby analizowania poszczególnych efektów prostych, wystarczy przedstawić i zinterpretować merytorycznie efekt główny. W naszym przykładzie nie ma potrzeby mówić o tym, jaki jest wpływ rodzaju gleby na plony uzyskiwane z ziarna B1, z ziarna B2 i z ziarna B3. Wystarczy powiedzieć, że, niezależnie od rodzaju ziarna, zbiory uzyskiwane na glebie A1 są wyższe niż uzyskiwane na glebie A2.

Część B Rysunku 1 przedstawia inną sytuację: efekty proste zmiennej A (gleby) nie są równe (co łatwo zauważyć, bo linie łączące średnie grupowe nie są równoległe). W tym wypadku efekt główny nie dostarcza satysfakcjonującej informacji o wpływie gleby na wielkość plonów. Średnio rzecz biorąc, zbiory uzyskiwane na glebie A1 są wyższe niż zbiory na glebie A2, ale ocena efektu gleby oparta na takim porównaniu byłaby myląca. Bliższa analiza wyników pokazuje bowiem, że wpływ gleby zależy od odmiany ziarna: rodzaj gleby nie ma wpływu na zbiory uzyskiwane z odmiany ziarna B2, natomiast gleba B1 pogarsza zbiory odmiany B1 i zwiększa plony odmiany B3. Ze względu na te różnice możemy pominąć w analizie wyników efekt główny gleby i skoncentrować się na jej efektach prostych.

Omawiając wyżej efekty główne i proste, ułatwiliśmy sobie zadanie wybierając do analizy zmienną A mającą tylko dwa poziomy. Zmienna B (odmiana ziarna) ma jednak trzy poziomy. Jak należy w takim wypadku rozumieć efekt główny i efekt prosty? Postępując analogicznie jak w wypadku zmiennej A, moglibyśmy zdefiniować więcej niż jeden efekt zmiennej B. Moglibyśmy np. zdefiniować jeden z jej efektów ($\beta_1$) jako różnicę między odmianami ziarna B1 i B2 a drugi efekt ($\beta_2$) – jako różnicę między odmianami B2 i B3, co możemy zapisać symbolicznie: $\beta_1 = B_2 - B_1$, $\beta_2 = B_3 - B_2$ (nie jest to oczywiście jedyny możliwy sposób zdefiniowania efektów zmiennej trzypoziomowej, o innych sposobach będzie mowa dalej przy omawianiu analizy kontrastów). Każdy z dwóch efektów zmiennej B możemy uśrednić po obu poziomach A, jak też policzyć go oddzielnie dla każdego poziomu zmiennej A (dla każdego rodzaju gleby). Otrzymalibyśmy w ten sposób dwa efekty główne zmiennej B oraz jej cztery efekty proste – tj. po dwa dla każdego z poziomów A. Jeśli tak, to pojawia się bardziej ogólne pytanie, czy (w wypadku, gdy zmienna ma więcej niż dwa poziomy) powinniśmy mówić o efekcie, czy też o efektach tej zmiennej. Odpowiedź zależy od rodzaju zmiennej i wybranego modelu statystycznego.

Pojęcie efektu (w liczbie pojedynczej) zmiennej niezależnej jest względnie jasne, jeśli jest to zmienna ciągła. Przypuśćmy, że mamy do czynienia z zależnością między ilorazem inteligencji (X) a wynikiem uzyskanym w teście osiągnięć szkolnych (Y) i że jest to pozytywna zależność prostoliniowa. W takim wypadku mówienie o efekcie zmiennej niezależnej (inteligencji) jest w pełni uzasadnione. Łatwo też podać merytoryczną interpretację tego efektu: im wyższy poziom inteligencji, tym wyższy przewidywany wynik w teście osiągnięć. Ilustracją graficzną siły tego efektu byłby kąt nachylenia linii regresji Y względem X: im bardziej stroma linia regresji, tym silniejsza zależność (dla dwóch zmiennych przedstawionych w postaci standardowej, a więc wolnej od wpływu jednostek pomiaru, współczynnik nachylenia linii regresji $\beta$ jest równy współczynnikowi korelacji między obu zmiennymi).

Podobnie prosta jest interpretacja efektu zmiennej kategorialnej, gdy mamy do czynienia z analizą wariancji opartą na modelu czynników losowych (*random factors*). Powiedzmy, że postawiliśmy „intrygujące" pytanie, czy barwa ściany wpływa na wynik uzyskiwany w teście inteligencji T. Aby to sprawdzić, moglibyśmy zaplanować eksperyment w następujący sposób: 1) z populacji barw (w praktyce – z jakiegoś dużego zbioru barw) wylosowalibyśmy podzbiór $k$ barw, 2) podzielilibyśmy losowo badaną próbę na $k$ grup i 3) każdą z $k$ grup przebadalibyśmy testem inteligencji T w pokoju o innej barwie ściany (wybranej z naszego podzbioru $k$ barw). Gdyby zbiorczy test $F$ (*omnibus F test*), czyli test $F$ porównujący jednocześnie więcej niż dwie średnie, wykazał istotność różnic między badanymi grupami, moglibyśmy podać prostą interpretację takiego wyniku: barwa ściany wpływa na wynik testu osiągnięć szkolnych. Gdybyśmy chcieli zreplikować ten eksperyment, powinniśmy powtórnie wylosować pewną liczbę barw (niekoniecznie taką samą, jak poprzednio) z dużego zbioru barw i przypisać je badanym grupom (nie byłyby to zapewne te same barwy, co w badaniu pierwszym). Ponieważ badanie nasze nie dotyczy efektu konkretnej barwy (konkretnego poziomu zmiennej Barwa), ale barwy jako takiej, możemy mówić po prostu o efekcie barwy (w liczbie pojedynczej).

Model czynników losowych jest jednak niezwykle rzadko wykorzystywany w badaniach psychologicznych. Najczęściej stosujemy model czynników stałych (*fixed factors*), który zakłada, że uwzględnione w badaniu poziomy zmiennej niezależnej nie są dobrane losowo, lecz celowo. Przeanalizujmy prosty przykład. Wyobraźmy sobie, że badamy efektywność trzech metod nauczania języka obcego: metody tradycyjnej (A1) oraz dwóch nowych metod: A2 i A3, a celem badania jest uzyskanie odpowiedzi na pytanie, czy któraś z nowych metod jest lepsza od metody tradycyjnej. Odpowiedzi na tak postawione pytanie nie udzieli zbiorczy test $F$. Istotna wartość $F$ oznacza bowiem tylko tyle, że możemy odrzucić hipotezę zerową, mówiącą o równości wszystkich średnich grupowych, którą to hipotezę możemy w naszym przypadku sformułować następująco: $H_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Nie wiemy jednak, które różnice między średnimi są istotne. Aby uzyskać odpowiedź na postawione wyżej pytanie badawcze, musielibyśmy sformułować je w inny sposób, na przykład w postaci dwóch bardziej szczegółowych pytań: 1) czy metoda A2 jest lepsza od metody A1 i 2) czy metoda A3 jest lepsza od metody A1? Jeśli zgodzimy się z przedstawionym tu rozumowaniem, to zgodzimy się też pewnie z tezą, że w badaniu naszym nie interesuje nas „ogólny" (nieinterpretowalny merytorycznie) efekt zmiennej Metoda nauczania (oszacowany za pomocą zbiorczego testu $F$), interesują nas natomiast dwa konkretne efekty tej zmiennej, które można przedstawić w postaci kontrastów: $\alpha_1$ = A2 – A1 i $\alpha_2$ = A3 – A1. Podobne podejście do analizy efektów zmiennych kategorialnych znajdujemy w wielokrotnej regresji liniowej.

Przestawienie się z myślenia w języku zmiennych kategorialnych na myślenie w języku kontrastów stwarza często problemy. Jest to zadziwiające zjawisko, gdyż pojęcie kontrastu, czyli różnicy (np. między dwiema grupami lub dwoma pomiarami), jest niezwykle proste, wręcz intuicyjne, podczas gdy do opisu efektu zmiennej wielokategorialnej musimy użyć tak abstrakcyjnych pojęć, jak wariancja czy suma kwadratów. Trzyletnie dziecko zrozumie pytanie „czy tata jest wyższy od mamy?", natomiast nie zrozumie pytania „czy wariancja wzrostu jest większa w rodzinie Kowalskich czy w rodzinie Malinowskich?". Problemy z przestawieniem się na myślenie w kategoriach kontrastów można wytłumaczyć chyba tylko długotrwałym wpajaniem studentom psychologii języka tradycyjnej analizy wariancji.

**Analiza efektów zmiennych kategorialnych w ANOVA i wielokrotnej analizie regresji**

Chcąc analizować zmienne kategorialne za pomocą MR, musimy zakodować je w postaci wektorów – dychotomicznych zmiennych, z których każda definiuje jakąś różnicę między średnimi (między pojedynczymi średnimi lub kombinacjami średnich), a więc *de facto* – jakiś kontrast (por. Cohen, Cohen, West i Aiken, 2003; Pedhazur, 1982). Jeśli zmienna kategorialna ma $k$ poziomów, to liczba wektorów musi być równa $k$ – 1. Inaczej mówiąc, zmienną mającą $k$ – 1 stopni swobody musimy zastąpić przez $k$ – 1 wektorów, każdy z jednym stopniem swobody. Niekiedy wektory określane są mianem zmiennych instrumentalnych (Brzeziński, 1996, s. 371), co ma podkreślać, że są one stosowane jako narzędzia służące do analizy tradycyjnie rozumianych zmiennych kategorialnych w MR. Faktycznie jednak wektory stanowią alternatywne podejście do definiowania i interpretowania efektów zmiennych kategorialnych.

Załóżmy, że zakodujemy dwupoziomową zmienną A w postaci wektora $X_1$, a trzypoziomową zmienną B w postaci wektorów $Z_1$ i $Z_2$ i chcemy oszacować za pomocą MR wpływ tych wektorów i ich interakcji na zmienną zależną. Wynik konkretnej osoby możemy w takim wypadku przedstawić jako liniową kombinację stałej równania regresji ($b_0$), efektów głównych i interakcyjnych poszczególnych wektorów (gdzie każdy z tych efektów równa się iloczynowi wartości wektora i związanego z nim współczynnika regresji) oraz błędu (e):

(3) $$Y' = b_0 + b_1X_1 + b_2Z_1 + b_3Z_2 + b_4X_1Z_1 + b_5X_1Z_2 + e$$

Dokładna interpretacja efektów poszczególnych wektorów zależy od sposobu zakodowania zmiennych kategorialnych (od sposobu zdefiniowania kontrastów). Analiza regresji dostarczy nam bezpośrednio oszacowania wielkości efektów poszczególnych wektorów (kontrastów) i ich istotności statystycznej.

Podobny sposób definiowania efektów zmiennych kategorialnych znajdujemy w równaniu strukturalnym ANOVA (Winer, Brown i Michels, 1991, s. 292 i n.). Dla modelu dwuczynnikowego A × B o $I$ poziomach czynnika A, $J$ poziomach czynnika B oraz $K$ badanych przypadkach (*case*) równanie to ma postać:

(4) $$X_{IJK} = \mu.. + \alpha_I + \beta_J + \alpha\beta_{IJ} + \varepsilon_{IJK}$$

gdzie $\mu..$ oznacza średnią ogólną (indeks w postaci kropki oznacza wartość uśrednioną po wszystkich poziomach danego czynnika), $\alpha_I$ – efekt $I$-tego poziomu czynnika A, $\beta_J$ – efekt $J$-tego poziomu czynnika B, $\alpha\beta_{IJ}$ – efekt interakcji obu czynników, natomiast $\varepsilon_{IJK}$ – błąd związany z osobą $K$ badaną w warunkach będących kombinacją $I$-tego poziomu A i $J$-tego poziomu B (dla ułatwienia, będę mówił dalej nie o przypadkach, ale o osobach badanych). Przykładowo, wynik osoby nr 10 badanej w warunkach będących kombinacją pierwszego poziomu czynnika A i trzeciego poziom czynnika B będzie równy:

$$X_{1,3,10} = \mu.. + \alpha_1 + \beta_3 + \alpha\beta_{1,3} + \varepsilon_{1,3,10}$$

Jak widać, równanie strukturalne dla ANOVA przypomina pod wieloma względami równanie regresji. W pierwszym przypadku, efekty poszczególnych oddziaływań (poszczególnych poziomów zmiennej kategorialnej) definiowane są jako odchylenie wybranych średnich grupowych od średniej ogólnej, w drugim przypadku – jako ich odchylenie od stałej równania regresji. Forma wyników, jakie uzyskujemy przy użyciu każdej z metod, jest jednak odmienna. Jeśli dane z eksperymentu dwuczynnikowego A × B poddamy tradycyjnej analizie wariancji opartej na sumie kwadratów, otrzymamy trzy zbiorcze testy $F$, stanowiące oszacowanie istotności efektów głównych obu czynników oraz ich interakcji. Nie będzie to jednak oszacowanie efektów poszczególnych oddziaływań (efektów poszczególnych poziomów czynników eksperymentalnych). Test $F$ dla efektu głównego czynnika A stanowi oszacowanie istotności łącznego efektu wszystkich $I$ poziomów tego czynnika, a test $F$ dla efektu głównego czynnika B – oszacowanie istotności łącznego efektu wszystkich $J$ poziomów czynnika B. Test $F$ dla interakcji testuje z kolei istotność tej części łącznego efektu obu czynników, która pozostaje po odjęciu od niego efektów głównych czynnika A i czynnika B. Inaczej mówiąc, testuje on istotność wszystkich efektów interakcyjnych obu zmiennych. Chcąc oszacować efekty poszczególnych oddziaływań (poszczególnych poziomów czynników eksperymentalnych) bądź ich kombinacji, musimy podjąć dodatkowe kroki – przeprowadzić analizę efektów prostych i analizę kontrastów. Oczywiście, zastosowanie ANOVA i MR prowadzi ostatecznie do takich samych wyników, inne są tylko sposoby dochodzenia do wyników oraz ich forma.

Uważa się (por. Howell, 2007; Kirk, 1995; Searle, 2006; Tabachnik i Fidell, 2007; zob. też StatSoft, 2006), że analiza wariancji może być traktowana jako szczególny przypadek wielokrotnej regresji liniowej, którą z kolei można traktować jako szczególny przypadek ogólnego modelu liniowego (*general linear model* – GLM). Zaletą GLM, opartego na rachunku macierzowym, jest jego uniwersalność, umożliwiająca zastosowanie takich samych algorytmów obliczeniowych do różnych problemów statystycznych. W SPSS wieloczynnikowa analiza wariancji jest przeprowadzana za pomocą GLM, choć jej wyniki są prezentowane w formie przypominającej tradycyjną analizę wariancji (nie do końca jednak, o czym świadczy chociażby obecność wyrazu „stała" (*intercept)* w tabeli zawierającej podstawowe wyniki analizy wariancji).

**Analiza przykładowych danych – analiza wariancji**

Dla przybliżenia analizy interakcji zmiennych kategorialnych przeanalizujmy przykładowe dane liczbowe, najpierw przy zastosowaniu tradycyjnej analizy wariancji a następnie przy użyciu wielokrotnej regresji liniowej. Dla lepszego ukazania podobieństwa obu metod i różnic między nimi, obie analizy przedstawione zostaną dość szczegółowo. Wyobraźmy sobie, że mamy do czynienia z eksperymentem w grupach kompletnie zrandomizowanych, a jego celem jest ocena wpływu trzech zadań umysłowych oraz poziomu motywacji (zoperacjonalizowanego jako stosowanie lub niestosowanie nagrody) na

*Tabela 1.*
Fikcyjne dane dotyczące wpływu motywacji i rodzaju zadania na częstość skurczów serca

| OB | Motywacja | Zadanie | HR | M | Z1 | Z2 | MZ1 | MZ2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 86 | –0,5 | –0,3333 | –0,5 | 0,1667 | 0,25 |
| 2 | 1 | 1 | 88 | –0,5 | –0,3333 | –0,5 | 0,1667 | 0,25 |
| 3 | 1 | 1 | 90 | –0,5 | –0,3333 | –0,5 | 0,1667 | 0,25 |
| 4 | 1 | 2 | 81 | –0,5 | –0,3333 | 0,5 | 0,1667 | –0,25 |
| 5 | 1 | 2 | 84 | –0,5 | –0,3333 | 0,5 | 0,1667 | –0,25 |
| 6 | 1 | 2 | 87 | –0,5 | –0,3333 | 0,5 | 0,1667 | –0,25 |
| 7 | 1 | 3 | 87 | –0,5 | 0,6667 | 0 | –0,3334 | 0 |
| 8 | 1 | 3 | 89 | –0,5 | 0,6667 | 0 | –0,3334 | 0 |
| 9 | 1 | 3 | 91 | –0,5 | 0,6667 | 0 | –0,3334 | 0 |
| 10 | 2 | 1 | 80 | 0,5 | –0,3333 | –0,5 | –0,1667 | –0,25 |
| 11 | 2 | 1 | 88 | 0,5 | –0,3333 | –0,5 | –0,1667 | –0,25 |
| 12 | 2 | 1 | 87 | 0,5 | –0,3333 | –0,5 | –0,1667 | –0,25 |
| 13 | 2 | 2 | 84 | 0,5 | –0,3333 | 0,5 | –0,1667 | 0,25 |
| 14 | 2 | 2 | 89 | 0,5 | –0,3333 | 0,5 | –0,1667 | 0,25 |
| 15 | 2 | 2 | 85 | 0,5 | –0,3333 | 0,5 | –0,1667 | 0,25 |
| 16 | 2 | 3 | 94 | 0,5 | 0,6667 | 0 | 0,3334 | 0 |
| 17 | 2 | 3 | 95 | 0,50 | 0,6667 | 0 | 0,3334 | 0 |
| 18 | 2 | 3 | 99 | 0,50 | 0,6667 | 0 | 0,3334 | 0 |

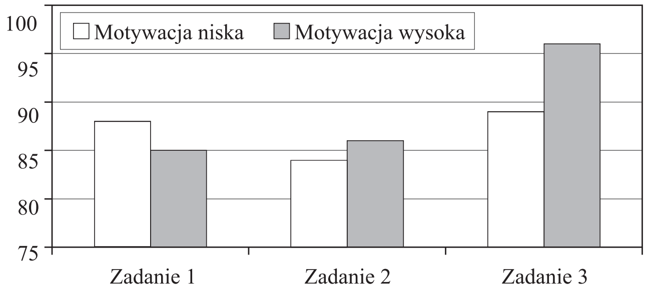
częstość skurczów serca (dla wygody tę ostatnią zmienną będę określał symbolem HR – skrótem angielskiej nazwy *heart rate*). Przyjmijmy również, że nasz eksperyment ma na celu sprawdzenie hipotezy, zgodnie z którą wykonywaniu Zadania 3 powinna towarzyszyć wyższa częstość skurczów serca niż wykonywaniu dwóch pozostałych zadań, ale tylko w warunkach wysokiej motywacji. Przy niskiej motywacji wszystkim zadaniom powinien towarzyszyć taki sam poziom HR. Fikcyjne dane z takiego eksperymentu przedstawione są w Tabeli 1. W kolumnie pierwszej podany jest numer osoby badanej, w kolumnie drugiej – wartość zmiennej Motywacja (1 oznacza niską motywację, 2 – wysoką motywację), w kolumnie trzeciej – rodzaj zadania, a w kolumnie czwartej – wyniki pomiaru częstości skurczów serca w uderzeniach na minutę (u/min). W pozostałych kolumnach (5–9) znajdują się dane, które zostaną wykorzystane później, w analizie regresji.

Dokonajmy analizy naszych danych za pomocą dwuczynnikowej analizy wariancji (w SPSS taki wariant analizy stanowi jedną z opcji w katalogu GLM). Wstępna analiza wariancji (por. Tabela 2) pokazuje, że efekt główny Motywacji jest nieistotny, $F(1, 12) = 2{,}16$, $p = 0{,}167$, natomiast istotne są: efekt główny Zadania, $F(2, 12) = 11{,}34$, $p = 0{,}002$, oraz interakcja Motywacja × Zadanie, $F(2, 12) = 4{,}5$, $p = 0{,}035$. Średnie dla poszczególnych grup pokazane są na Rysunku 1[1].

Ponieważ interakcja obu czynników eksperymentalnych okazała się istotna, nie interpretujemy efektów głównych, ale musimy przeprowadzić analizę efektów prostych. Jeśli, tak jak w naszym przypadku, mamy do czynienia z interakcją dwóch czynników, analiza efektów prostych sprowadza się do przeprowadzenia kilku analiz jednoczynnikowych[2]. Analiza efektów prostych zmiennej Motywacja wykazała, że jej efekt jest nieistotny dla Zadania 1, $F(1, 4) = 1{,}174$, $p = 0{,}34$, i Zadania 2, $F(1, 4) = 0{,}75$, $p = 0{,}435$, natomiast jest istotny dla

*Tabela 2.*
Podsumowanie wyników analizy wariancji danych z Tabeli 1

| Źródło zmienności | SS | *df* | MS | *F* | *p* |
|---|---|---|---|---|---|
| Zmienne niezależne w modelu | 282 | 5 | 56,400 | 6,786 | 0,003 |
| Motywacja (M) | 18 | 1 | 18,000 | 2,160 | 0,167 |
| Zadanie (Z) | 189 | 2 | 94,500 | 11,340 | 0,002 |
| Motywacja × Zadanie | 75 | 2 | 37,500 | 4,500 | 0,035 |
| Błąd | 100 | 12 | 8,333 | | |
| Razem | 382 | 18 | | | |




*Rysunek 2.*
Wpływ motywacji i rodzaju zadania na częstość skurczów serca.

Zadania 3, $F(1, 4) = 13{,}364$, $p = 0{,}022$. Analiza efektów prostych Zadania wykazała z kolei, że efekt taki jest nieistotny dla niskiej motywacji $F(2, 6) = 3{,}706$, $p = 0{,}09$, natomiast istotny dla wysokiej motywacji $F(2, 6) = 10{,}091$, $p = 0{,}012$. Ponieważ jednak zmienna Zadanie ma trzy poziomy, uogólniony test $F$ nie udziela wystarczającej informacji o różnicach między zadaniami w grupie z wysoką motywacją. Wiemy co prawda, że w takich warunkach poziom HR towarzyszący wykonywaniu każdego z trzech zadań nie jest jednakowy, nie wiemy jednak, które różnice między zadaniami są istotne. Aby uzyskać taką informację, potrzebny jest kolejny krok analizy – analiza kontrastów. Dopiero po oszacowaniu istotności różnic między poszczególnymi zadaniami będziemy mogli ocenić prawdziwość naszej hipotezy.

Rozróżnia się dwa podstawowe rodzaje kontrastów (por. Ferguson i Takane, 1997; Kirk, 1995; Winer i in., 1991): kontrasty nieplanowane (zwane inaczej *a posteriori, post hoc* lub *post mortem*) i kontrasty planowane (*a priori*). Stosując pierwsze z nich możemy porównać każdą grupę z każdą inną (*multiple comparisons*). Maksymalna liczba kontrastów równa się w takim wypadku $k(k - 1)/2$, gdzie $k$ oznacza liczbę grup. Liczba kontrastów planowanych, nie może być natomiast większa niż $k - 1$. Kontrasty planowane mają większą moc statystyczną niż kontrasty *post hoc:* prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, dotyczącej tej samej pary średnich, jest większe, gdy testujemy ją jako kontrast planowany, niż wtedy, gdy testujemy ją jako kontrast *post hoc*. Z drugiej strony jednak, stosowanie kontrastów *a priori* wymaga jasno sformułowanych hipotez badawczych. W *menu* wieloczynnikowej analizy wariancji programu SPSS znajdziemy czternaście „gotowych” (zdefiniowanych przez autorów programu) kontrastów *post hoc*, opartych na założeniu o równości wariancji, oraz trzy inne kontrasty *post hoc,* niewymagające takiego założenia. W *menu* tym znajdziemy też sześć zdefiniowanych kontrastów planowanych, a w *menu* jednoczynnikowej analizy wariancji (znajdującej się w katalogu „porównywanie średnich") dostępna jest opcja pozwalająca na samodzielne definiowanie kontrastów planowanych (zasady samodzielnego definiowania kontrastów planowanych opisałem w innej pracy, Sosnowski, 2004a).

Ponieważ w naszym badaniu mamy jasno sformułowane hipotezy, możemy zastosować któryś z kontrastów planowanych. Wybór konkretnego kontrastu musi być oczywiście dopasowany do hipotezy badawczej. Do sprawdzenia naszych hipotez odpowiednie będą kontrasty ortogonalne. Dla zmiennej Zadanie zdefiniowaliśmy dwa takie kontrasty: (1) porównanie Zadania 3 z Zadaniami 1 i 2 oraz (2) porównanie Zadania 1 z Zadaniem 2. Pierwszy kontrast odpowie na pytanie, czy wykonywaniu Zadania 3 towarzyszy wyższy poziom HR niż wykonywaniu dwóch pozostałych zadań, drugi kontrast natomiast powie, czy Zadania 1 i 2 różnią się między sobą pod tym względem, czy nie.

Kontrast jest ważoną sumą średnich, tj. sumą średnich, z których każda została pomnożona przez odpowiedni współczynnik kontrastu. Definiowanie kontrastów polega więc w praktyce na przypisaniu grupom odpowiednich współczynników kontrastów (w SPSS, w opcji „Porównywanie średnich", znajdziemy odpowiednie okienko do wpisywania tych współczynników). Pierwszy z naszych kontrastów możemy zdefiniować, przypisując kolejnym grupom współczynniki –1, –1, 2, drugi kontrast natomiast zdefiniujemy za pomocą współczynników –1, 1, 0. Jak łatwo zauważyć, suma iloczynów współczynników przypisanych poszczególnym grupom równa się zero: (–1)(–1) + (–1)(1) + (2)(0) = 0. Spełniony jest więc specyficzny warunek stawiany współczynnikom definiującym kontrasty ortogonalne. Każdy z kontrastów ma jeden stopień swobody. Tak więc, zmienną Zadanie o dwóch stopniach swobody zastąpiliśmy dwoma kontrastami o jednym stopniu swobody każdy. Ponieważ zmienna Metoda ma dwa poziomy (jeden stopień swobody), nie ma tu potrzeby definiowania kontrastów: pełnej informacji o efekcie (prostym lub głównym) tej zmiennej dostarcza test *F* (standardowy test *F* daje w tym wypadku taki sam wynik, jak test *F* dla kontrastu między dwiema grupami).

Analiza statystyczna zdefiniowanych wyżej kontrastów (w ich wersji zakładającej homogeniczność wariancji), przeprowadzona dla warunków niskiej motywacji, wykazała nieistotność zarówno pierwszego $t(6) = 1{,}782$, $p = 0{,}125$, jak i drugiego kontrastu, $t(6) = 2{,}058$, $p = 0{,}085$. Nie jest to zaskakujące, gdyż test *F* wykazał wcześniej brak różnic między analizowanymi grupami. Taka sama analiza dla warunków wysokiej motywacji, wykazała, że pierwszy kontrast jest istotny, $t(6) = 4{,}477$, $p = 0{,}004$, natomiast drugi jest nieistotny, $t(6) = 0{,}369$, $p = 0{,}755$. Uzyskane wyniki pozwalają stwierdzić, że wszystkie nasze hipotezy potwierdziły się: w warunkach wysokiej motywacji Zadanie 3 powoduje większy wzrost HR niż Zadania 1 i 2 (kontrast 1), podczas gdy Zadania 1 i 2 nie różnią się między sobą (kontrast 2). W warunkach niskiej motywacji natomiast nie ma różnic między zadaniami (oba kontrasty są nieistotne).

Ważną zaletą kontrastów ortogonalnych jest to, że są one właśnie ortogonalne, czyli nieskorelowane ze sobą. W konsekwencji, suma kwadratów wyjaśniana przez zmienną niezależną jest równa sumie sum kwadratów wyjaśnianych przez poszczególne kontrasty. W przypadku zmiennej Zadanie otrzymamy więc równość: $SS_{\text{zadanie}} = SS\psi_1 + SS\psi_2$, gdzie symbole $\psi_1$ i $\psi_2$ oznaczają odpowiednie kontrasty. Warto przy tym pamiętać, aby ortogonalności kontrastów nie mylić z ortogonalnością planu badawczego (czyli – nieskorelowaniem czynników eksperymentalnych). Dla planu ortogonalnego możemy zdefiniować zarówno kontrasty ortogonalne jak i nieortogonalne (na przykład, popularne kontrasty proste nie są ortogonalne).

W wypadku naszych danych, suma kwadratów wyjaśniana przez zmienną Zadanie w warunkach wysokiej motywacji wynosi: $SS_{(Z,M=2)} = 222$ (wartość tę możemy znaleźć w tabeli SPSS zawierającej podsumowanie wyników jednoczynnikowej analizy wariancji). Sumy kwadratów związane z obu kontrastami, musimy natomiast policzyć sami. Możemy się w tym celu posłużyć prostym wzorem podanym w podręczniku Fergusona i Takane (1997, s. 345–346).

$$SS_{\psi} = \frac{n\psi_i^2}{\sum_j c_{ij}^2} \tag{5}$$

gdzie *n* oznacza liczebność grupy, $\psi_i$ – wartość analizowanego kontrastu, natomiast $c_{ij}$ – wartości współczynników, za pomocą których zdefiniowaliśmy dany kontrast.

Wartość samego kontrastu (czyli różnicy między wybranymi średnimi) możemy łatwo policzyć sami albo znaleźć wśród wyników podawanych przez SPSS, w tabeli „Testy kontrastów". W wypadku naszych danych, wartość pierwszego kontrastu wynosi 21, drugi zaś równa się 1. Jak nietrudno policzyć, suma kwadratów dla pierwszego kontrastu wynosi: $SS\psi_1 = 3\ (21^2) / ((-1^2) + (-1^2) + (2^2)) = 220{,}5$ a dla drugiego kontrastu: $SS\psi_2 = 3\ (1^2) / ((1^2) + (1^2) + (0^2)) = 1{,}5$. Otrzymujemy więc równość: $222 = 220{,}5 + 1{,}5$. Jak widać, w warunkach wysokiej motywacji na pierwszy kontrast przypada około 99% sumy kwadratów wyjaśnianej przez zmienną Zadanie ($220{,}5 / 222 \approx 0{,}99$), natomiast na drugi tylko około 1%, z tym jednak, że, jak wiemy z wcześniejszej analizy, drugi kontrast jest nieistotny statystycznie. Znając sumy kwadratów dla poszczególnych kontrastów, możemy łatwo oszacować ich istotność za pomocą testu *F*. W tym celu należy podzielić średni kwadrat dla kontrastu (a przy $df = 1$, suma kwadratów jest równa średniemu kwadratowi) przez średni kwadrat błędu z ogólnej analizy wariancji (tu: przez średni kwadrat błędu z jednoczynnikowej ANOVA dla warunków wysokiej bądź niskiej motywacji). Jest to ważny wzór, ponieważ pokazuje, że oszacowanie istotności kontrastów planowanych oparte jest na tym samym oszacowaniu błędu, co oszacowanie istotności efektów czynników eksperymentalnych (w wypadku kontrastów *post hoc*, błąd ten będzie natomiast większy). W wypadku wysokiej motywacji otrzymamy dla pierwszego kontrastu: $F(1, 6) = 220{,}5/11 = 20.045$, a dla drugiego: $F(1, 6) = 1{,}5/11 = 0{,}136$. Wyciągając pierwiastek kwadratowy z wartości testów *F*, otrzymamy wartości testów *t* dla kontrastów – takie same, jakie podane zostały wcześniej (na przykład: $\sqrt{20{,}045} = 4{,}477$).

Przedstawiona wyżej analiza przeprowadzona została w trzech krokach: (1) ogólna analiza wariancji, (2) analiza efektów prostych (po stwierdzeniu, że między czynnikami eksperymentalnymi zachodzi interakcja) i (3) analiza kontrastów (po stwierdzeniu istotnego efektu zmiennej Zadanie, mającej więcej niż dwa poziomy). Jeśli jednak dysponujemy (tak jak w naszym przykładzie) na tyle jasną hipotezą, że jesteśmy w stanie przedstawić ją w postaci kontrastów planowanych (niekoniecznie ortogonalnych), to możemy ograniczyć całą analizę do analizy kontrastów, a pominąć dwa jej pierwsze kroki, w tym również zbiorcze testy *F* (por. Kirk, 1995; Rosenthal, Rosnow i Rubin, 2000). Analiza kontrastów dostarcza bowiem wyczerpującej informacji na temat trafności wszystkich hipotez badawczych. Wszystkie trzy kroki analizy są natomiast konieczne, jeśli nie mamy jasno sformułowanych hipotez i musimy stosować kontrasty *post hoc.* Jak wiadomo, kontrasty takie powinno się stosować dopiero po stwierdzeniu istotności zbiorczego testu *F,* czyli – po odrzuceniu hipotezy zerowej mówiącej o równości wszystkich (trzech lub więcej) średnich grupowych.

**Analiza przykładowych danych – analiza regresji**

Przeanalizujmy dane z Tabeli 1 za pomocą wielokrotnej regresji liniowej[3]. Ponieważ zmienne niezależne (zwane w analizie regresji predyktorami) są kategorialne, nie możemy włączyć ich do MR w oryginalnej postaci. Gdybyśmy tak postąpili, byłoby to równoznaczne z uznaniem, że na przykład wartość 2 zmiennej Motywacja jest dwa razy większa niż jej wartość 1. W wypadku zmiennej Zadanie trudno byłoby nawet podać sensowną interpretację jej trzech wartości liczbowych. Zmienne kategorialne musimy zakodować w postaci odpowiednich wektorów (Cohen i in., 2003; Pedhazur, 1982). Wektory możemy potraktować jako nowe zmienne, którymi zastępujemy oryginalne zmienne niezależne. Definiowanie wektorów jest *de facto* definiowaniem kontrastów. Ze względów matematycznych, liczba wektorów (kontrastów) powinna być równa $k - 1$, gdzie $k$ oznacza liczbę poziomów kodowanej zmiennej kategorialnej.

Istnieją trzy podstawowe systemy kodowania zmiennych kategorialnych (Cohen i in., 2003; Pedhazur, 1982): (1) kodowanie zero-jedynkowe (*dummy coding*), (2) kodowanie efektów (*effect coding*) oraz (3) kodowanie ortogonalne (*orthogonal coding*)[4]. Przy kodowaniu zero-jedynkowym każdy wektor definiuje różnicę między średnią dla wybranego poziomu zmiennej niezależnej a średnią w grupie odniesienia (np. każdą grupę eksperymentalną porównujemy z grupą kontrolną). Uzyskane tą metodą kontrasty odpowiadają kontrastom prostym (*simple*) w ANOVA. Przy kodowaniu efektów każdy wektor definiuje różnicę między średnią dla wybranego poziomu zmiennej niezależnej a średnią ogólną (a więc podobnie jak definiowane są efekty w równaniu strukturalnym ANOVA). Przykładem może być porównanie średnich zarobków w poszczególnych województwach do średniej krajowej. Kodowanie takie jest szczególnie godne polecenia w wypadku złożonych planów badawczych, kiedy mamy do czynienia z efektami wielu zmiennych. Zdefiniowane tą metodą kontrasty odpowiadają kontrastom odchylenia (*deviation*) w ANOVA. Kodowanie ortogonalne daje wiele możliwości tworzenia wektorów (zwłaszcza gdy liczba poziomów zmiennej niezależnej jest duża) pod warunkiem jednak, że otrzymane wektory będą ortogonalne, czyli nieskorelowane ze sobą. Kodowanie takie odpowiada kontrastom ortogonalnym w ANOVA (wymagają one tam samodzielnego zdefiniowania). Wszystkie trzy systemy kodowania zostały dokładnie opisane w innych pracach (Brzeziński, 1996; Sosnowski, 2004b), nie będę więc tutaj omawiał tego zagadnienia.

Aby wyniki uzyskane za pomocą MR były porównywalne z wynikami uzyskanymi wcześniej za pomocą ANOVA, zastosujemy kodowanie ortogonalne. Najprościej jest dokonać takiego kodowanie przy użyciu liczb całkowitych. Przykładowo, aby zakodować różnicę między dwiema pierwszymi grupami a grupą trzecią możemy przypisać tym grupom wartości wektora: 1, 1, –2. Taki sposób kodowania ma tę wadę, że wartość niestandaryzowanego współczynnika regresji, związanego z danych wektorem, nie będzie równa liczbowo wielkości efektu tego wektora (wielkości analizowanej różnicy między średnimi), choć będzie do niego proporcjonalna (kilkakrotnie mniejsza). Aby zachować wspomnianą wyżej równość, kodowanie ortogonalne musi spełniać pewien dodatkowy warunek (Cohen i in., 2003, s. 333): różnica między wartością wektora przypisaną zbiorowi średnich z wagami dodatnimi i jego wartością przypisaną zbiorowi średnich z wagami ujemnymi musi być równa 1 (wartości zerowe wektora można oczywiście pominąć). Warunku tego nie spełniają przedstawione wyżej wartości: 1; 1; –2; gdyż: 1 – (–2) = 3, spełniają go natomiast wartości: 1/3; 1/3; –2/3; bo: 1/3 – (–2/3) = 1 (ponieważ w pierwszym kodowaniu różnica wartości wektora była równa 3, wystarczyło podzielić wszystkie wartości wektora przez 3). Jeśli zastosujemy to ostatnie kodowanie, wartość współczynnika *b* będzie równa różnicy między trzema średnimi, zdefiniowanej następująco: $(M_1 + M_2)/2 - M_3$. Warto jednak zaznaczyć, że niezależnie od tego, czy kodowanie spełnia podany wyżej warunek, czy też go nie spełnia, nie ma to istotnego wpływu na wyniki analizy statystycznej. Transformacja współczynników kontrastów, zalecana przez Cohena i współpracowników, powoduje jedynie zmianę wielkości niestandaryzowanych współczynników równania regresji, nie wpływa natomiast na ich istotność. Nie zmienia też wielkości ani istotności innych statystyk. Problem z wyborem odpowiednich wartości liczbowych do kodowania wektorów występuje tylko przy kodowaniu ortogonalnym. W innych wypadkach sam system kodowania wyznacza jednoznacznie wartości liczbowe, jakie można przypisać poszczególnym grupom.

Dane w Tabeli 1 (kolumny 5–9) zostały zakodowane metodą zalecaną przez Cohena i współpracowników. Dla łatwiejszego zapamiętania znaczenia poszczególnych wektorów (predyktorów równania regresji) zostały one oznaczone literami łatwo kojarzącymi się z nazwami oryginalnych zmiennych. Wektor M definiuje różnicę między wysoką (0,5) i niską Motywacją (–0,5), wektor Z1 definiuje kontrast między Zadaniem 3 (0,6667) a Zadaniem 1 (–0,3333) i Zadaniem 2 (–0,3333), natomiast wektor Z2 definiuje kontrast między Zdaniem 1 (–0,5) i Zadaniem 2 (0,5). Wektor MZ1 jest wynikiem pomnożenia wektora M przez wektor Z1 i oznacza interakcje obu tych zmiennych. Analogicznie, wektor MZ2 jest wynikiem pomnożenia M przez Z2. Predyktory zostały włączone do analizy metodą wprowadzania (*enter*) w kolejności: M, Z1, Z2, MZ1 i MZ2, a więc tak jak w hierarchicznej (*hierarchical*), inaczej – sekwencyjnej (*sequential*) analizie regresji (na temat różnych metod wprowadzania zmiennych do analizy zob. Cohen i in., 2003; Tabachnik i Fidell, 2007).

Tabela 3 zawiera oszacowanie składowych równania regresji oraz oszacowanie ich istotności statystycznej przy użyciu testu *t*-Studenta. Dla celów dydaktycznych, w tabeli tej przedstawione zostały dwa modele analizy: model bez interakcji (Model 1) i model z interakcją (Model 2).

*Tabela 3.*
Współczynniki równania regresji ich istotność statystyczna (analiza danych z Tabeli 1)

| Składowe równania regresji | *b* | *t* | *p* |
|---|---|---|---|
| Model 1 | | | |
| Stała | 88,00 | 105,600 | 0,001 |
| M | 2,00 | 1,200 | 0,250 |
| Z1 | 6,75 | 3,818 | 0,002 |
| Z2 | –1,50 | –0,735 | 0,475 |
| Model 2 | | | |
| Stała | 88,00 | 129,333 | 0,001 |
| M | 2,00 | 1,470 | 0,167 |
| Z1 | 6,75 | 4,677 | 0,001 |
| Z2 | –1,50 | –0,900 | 0,368 |
| MZ1 | 7,50 | 2,598 | 0,023 |
| MZ2 | 5,00 | 1,500 | 0,159 |

Jeśli pominąć efekt stałej, Model 1 ma trzy stopnie swobody, a współczynniki *b* dla zmiennych (wektorów) M, Z1 i Z2 są miarą ich efektów głównych. Model 2 zawiera oszacowanie efektów głównych wektorów i ich interakcji. Jak widać, wielkość współczynników regresji dla zmiennych M, Z1 i Z2 w Modelu 2 jest taka sama jak w Modelu 1, zmieniła się natomiast ich istotność statystyczna. Jest to zrozumiałe, gdyż suma kwadratów dla interakcji, która w Modelu 2 jest sumą kwadratów wyjaśnianą, w Modelu 1 stanowi składnik sumy kwadratów błędu. W efekcie, składnik błędu w Modelu 1 jest większy niż w Modelu 2. Wszystkie predyktory uwzględnione w Modelu 2 (bez uwzględnienia stałej) mają razem pięć stopni swobody (każdy predyktor ma jeden stopień swobody), czyli tyle samo, co zmienne niezależne uwzględnione w modelu ANOVA (por. Tabela 2). W wypadku ANOVA jednak efekt interakcji wymaga dalszej analizy efektów prostych, a efekt zmiennej Zadanie, mającej dwa stopnie swobody, wymaga dodatkowo analizy kontrastów. W wypadku MR nie jest to potrzebne: cała analiza może być przeprowadzona w jednym kroku, a jej wyniki mogą być przedstawione w jednej tabeli (Tabeli 3, Model 2). Jak z niej wynika, istotne są dwa efekty: 1) efekt predyktora Z1 (czyli: różnica między Zadaniem 3 i dwoma pozostałymi zadaniami) oraz 2) efekt predyktora MZ1 (czyli interakcja predyktorów M i Z1). Istotna jest również stała równania regresji ($b_0$), co oznacza, że różni się ona istotnie od zera. To, czy stała różni się od zera, nie ma zazwyczaj znaczenia dla interpretacji wyników, dlatego istotność stałej jest najczęściej pomijana w analizie.

Aby zrozumieć sens uzyskanych wyników, warto odwołać się jeszcze raz do równania regresji. Przy pięciu predyktorach równanie to (a dokładniej: wzór na oszacowanie wartości oczekiwanej zmiennej zależnej) przybiera ogólną postać:

(6) $Y' = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + b_5X_5$

W przypadku naszych danych równanie będzie miało postać:

(7) $Y' = b_0 + b_1M + b_2Z_1 + b_3Z_2 + b_4MZ_1 + b_5 MZ_2$

Jak należy interpretować to równanie? Jeśli zmienne niezależne są ciągłe, czyli przybierają bardzo dużą (teoretycznie nieprzeliczalną) liczbę wartości, *Y*' oznacza oczekiwaną wartość zmiennej zależnej przewidywaną dla określonej kombinacji wartości zmiennych niezależnych. Osoby badane w tych samych warunkach mogą oczywiście różnić się wartością zmiennych niezależnych, różna też będzie wówczas dla każdej z nich oczekiwana wartość zmiennej zależnej. W naszym wypadku jednak zmienne niezależne (wektory) oznaczają przynależność do grup eksperymentalnych, a więc ich wartość jest jednakowa dla wszystkich osób w tej samej grupie. *Y'* oznacza w takim wypadku wartość oczekiwaną zmiennej zależnej dla osób badanych w tych samych warunkach. Estymatorem tej wartości jest średnia grupowa (wynik indywidualny i-tej osoby z j-tej grupy różni się od średniej grupowej o wartość błędu: $\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - Y'_j$). Stała równania regresji ($b_0$) przy kodowaniu ortogonalnym równa się średniej ogólnej. Pozostałe wyrazy po prawej stronie równania oznaczają efekty poszczególnych wektorów, a każdy z tych efektów równa się wartości wektora pomnożonego przez wartość związanego z nim współczynnika regresji. Ostatecznie wartość oczekiwana zmiennej zależnej jest liniową kombinacją stałej (w naszym wypadku średniej ogólnej) oraz efektów poszczególnych wektorów. Analiza regresji pozwala oszacować wielkość tych efektów oraz ich istotność statystyczną.

Dla przybliżenia sensu równania (7) spróbujmy zastosować go do analizy wyników jednej z grup. Niech będzie to grupa ostatnia, złożona z osób o numerach 16–18, w której zmienna Motywacja ma poziom 2, a zmienna Zadanie ma poziom 3. Dla ułatwienia tej analizy, wartości wektorów, wartości współczynników regresji oraz wartości ich iloczynów zestawiłem w Tabeli 4.

*Tabela 4.*
Wartości predyktorów, współczynników równania regresji oraz ich iloczynów dla grupy wykonującej Zadanie 3 w warunkach wysokiej motywacji

| Predyktory i współczynniki równania regresji | Stała | M | Z1 | Z2 | MZ1 | MZ2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Predyktor | 1 | 0,5 | 0,6667 | 0 | 0,3334 | 0 |
| Współczynnik *b* | 88 | 2 | 6,75 | –1,5 | 7,5 | 5 |
| Iloczyn: *b* · Predyktor | 88 | 1 | 4,5 | 0 | 2,5 | 0 |

Jak widać w tabeli, predyktory Z2 i MZ2 mają w analizowanej grupie wartość zerową, w związku z czym ich efekty są również zerowe. Jest to zrozumiałe, gdyż efekt wektora Z2 (różnica między Zadaniem 1 i Zadaniem 2) oraz efekt jego interakcji z wektorem M (motywacja) nie odnoszą się do analizowanej grupy. Wartość oczekiwana zmiennej Y dla tej grupy będzie więc równa sumie stałej i efektów trzech predyktorów:

(8) $Y'_{2,3} = b_0 + b_1M + b_2Z_1 + b_4MZ_1$

Po podstawieniu do powyższego wzoru wartości współczynników regresji i wartości wektorów przypisanych analizowanej grupie otrzymamy następującą postać równania:

$$Y' = 88 + (2 \cdot 0{,}5) + (6{,}75 \cdot 0{,}6667) + (7{,}5 \cdot 0{,}3333) = \\ = 88 + 1 + 4{,}5 + 2{,}5 = 96$$

Łatwo sprawdzić, że wynik przewidywany na podstawie powyższego równania jest równy wartości średniej w analizowanej grupie. Wyniki przedstawione wcześniej w Tabeli 3 pokazują jednak, że istotne statystycznie są tylko dwa z trzech efektów uwzględnionych w przedstawionym wyżej równaniu: efekt predyktora Z1 oraz efekt interakcyjny predyktora MZ1, natomiast efekt główny predyktora M (motywacja) jest nieistotny. Wynik uzyskany przez analizowaną tu grupę możemy więc ostatecznie zinterpretować następująco: wykonywaniu Zadania 3 towarzyszy wzrost HR o 4,5 u/min w porównaniu do średniej ogólnej (efekt predyktora Z1), a różnica ta powiększa się dodatkowo o 2,5 u/min, jeśli wykonywaniu Zadania 3 towarzyszy wysoka motywacja (efekt interakcyjny predyktora MZ1). Czytelnik może łatwo przeprowadzić podobną analizę dla innych grup, których wyniki są przedstawione w Tabeli 1.

Porównując wyniki MR do wyników ANOVA, widzimy, że prowadzą one do identycznych wniosków, choć forma wyników jest w każdym wypadku nieco inna. W wypadku ANOVA, sama interakcja zmiennych niezależnych nie ma w zasadzie interpretacji merytorycznej. Istotność interakcji sygnalizuje jedynie, że nie wszystkie efekty proste danej zmiennej są sobie równe, w związku z czym, interpretacja wyników powinna być oparta nie na analizie efektów głównych, lecz na analizie poszczególnych efektów prostych. Dopiero efekty proste poddają się interpretacji merytorycznej. W wypadku analizy tych samych danych za pomocą MR pojęcie efektu prostego w zasadzie nie jest potrzebne. Średnią dla danej grupy można bowiem przedstawić jako sumę stałej równania regresji (w przypadku kodowania ortogonalnego jest ona równa średniej ogólnej) oraz wybranych efektów głównych i interakcyjnych. Każdy z tych efektów ma jasną interpretację merytoryczną, co wykazaliśmy wyżej. Gdybyśmy mimo to chcieli zdefiniować efekty proste, byłyby one sumą odpowiednich efektów głównych i interakcyjnych (np. efekt prosty Zadania 3 w warunkach wysokiej motywacji jest równy sumie efektów Z1 i MZ1), ale zabieg taki nie wnosi niczego nowego do interpretacji wyników. Poza tym, MR nie dostarcza bezpośrednio oszacowania istotności efektów prostych, lecz jedynie oszacowanie istotności efektów głównych i interakcyjnych.

Przy omawianiu wyników ANOVA zwróciliśmy uwagę, że kontrasty ortogonalne są niezależne od siebie (nieskorelowane). Z podobną sytuacją mamy do czynienia w MR, jeśli stosujemy kodowanie ortogonalne. Wszystkie nasze wektory, tj. M, Z1, Z2, MZ1 i MZ2, są nieskorelowane ze sobą (co możemy łatwo sprawdzić w Tabeli „Korelacje", prezentowanej w statystykach opisowych). Ortogonalność predyktorów ma ważne konsekwencje dla interpretacji wyników analizy regresji. Jeśli predyktory są nieskorelowane, to suma kwadratów zmiennej zależnej, jaką można przewidzieć na podstawie równania regresji uwzględniającego wszystkie predyktory, równa się sumie sum kwadratów przewidywanych osobno przez poszczególne predyktory. Ponieważ w badaniu naszym mamy do czynienia ze zmiennymi manipulowalnymi, możemy pójść dalej w takiej interpretacji i mówić nie o przewidywanej, ale o wyjaśnianej sumie kwadratów.

Miarą sumy kwadratów przewidywanej (lub wyjaśnianej) przez predyktory równania regresji jest kwadrat współczynnika korelacji ($R^2$), zwany inaczej współczynnikiem determinacji (zasady interpretacji sumy kwadratów zmiennej zależnej przewidywanej przez predyktory skorelowane i nieskorelowane ze sobą, wraz z interpretacją współczynników korelacji cząstkowej i semicząstkowej, można znaleźć w pracach Cohena i współpracowników, 2003, oraz Tabachnik i Fidell, 2007). Współczynniki $R^2$ potrzebne do interpretacji naszych danych możemy znaleźć w Tabeli 5, zawierającej podsumowanie pięciu kolejnych modeli analizy regresji (w tabeli zachowano taką samą kolejność włączania predyktorów do równania regresji, jak w poprzedniej analizie).

Jak wynika z tabeli, wartość $R^2$ dla ostatecznego modelu regresji (z wszystkimi pięcioma predyktorami) wynosi 0,738. W kolumnie 4 (zmiana $R^2$) znajdujemy natomiast informację, o ile zwiększy się $R^2$ po włączeniu do równania kolejnego predyktora[5]. Jeśli predyktory są nieskorelowane, zmiana $R^2$ spowodowana włączeniem danego predyktora jest po prostu równa kwadratowi korelacji prostej (*zero-order correlation*) między danym predyktorem a zmienną zależną. Jak łatwo sprawdzić, w wypad-

*Tabela 5.*
Podsumowanie analizy kolejnych modeli regresji (uproszczona kopia tabeli z SPSS)

| Model | *R* | $R^2$ | Statystyki zmiany | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Zmiana $R^2$ | *F* dla zmiany $R^2$* | *df*1 | *df*2 | Istotność *F* |
| 1 | 0,217 | 0,047 | 0,047 | 0,791 | 1 | 16 | 0,387 |
| 2 | 0,724 | 0,524 | 0,477 | 15,041 | 1 | 15 | 0,001 |
| 3 | 0,736 | 0,542 | 0,018 | 0,540 | 1 | 14 | 0,475 |
| 4 | 0,830 | 0,689 | 0,147 | 6,158 | 1 | 13 | 0,028 |
| 5 | 0,859 | 0,738 | 0,049 | 2,250 | 1 | 12 | 0,159 |

1. Predyktory: (Stała), M
2. Predyktory: (Stała), M, Z1
3. Predyktory: (Stała), M, Z1, Z2
4. Predyktory: (Stała), M, Z1, Z2, MZ1
5. Predyktory: (Stała), M, Z1, Z2, MZ1, MZ2

* w polskiej wersji SPSS zamiast określenia „*F* dla zmiany *R* kwadrat", co można by zapisać symbolicznie $F(\Delta R^2)$, występuje mylące określenie „zmiana *F*"

ku naszych danych zachodzi równość: 0,047 + 0,477 + + 0,018 + 0,147 + 0,049 = 0,738. Oznacza to, że efekty zdefiniowanych przez nas wektorów (predyktorów równania regresji) są addytywne: łączny efekt wszystkich predyktorów jest równy sumie efektów poszczególnych predyktorów. Cząstkowe współczynniki $R^2$ możemy interpretować jako miary siły efektu (*effect size*) poszczególnych predyktorów. Możemy mianowicie powiedzieć, że zmienne M, Z1, Z2, MZ1 i MZ2 wyjaśniają, odpowiednio: 4,7%, 47,7%, 1,8%, 14,7% i 4,9% całkowitej sumy kwadratów zmiennej zależnej. Wniosek ten musimy jednak skorygować, ponieważ, jak wynika z Tabeli 3 (Model 2), tylko efekty predyktorów Z1 i MZ1 okazały się istotne w ostatecznym równaniu regresji, pierwszy na poziomie $p = 0{,}001$, drugi na poziomie $p = 0{,}023$. Do takiego samego wniosku prowadzi, w wypadku naszych danych, analiza istotności testów $F$, podana w ostatniej kolumnie Tabeli 5. Ściśle rzecz biorąc, nie jest to jednak ta sama informacja. Testy $F$ podane w Tabeli 5 stanowią oszacowania istotności zmiany $R^2$, wywołanej dołączeniem danego predyktora do uprzedniego modelu regresji. Jeśli predyktory są skorelowane, wielkość zmiany $R^2$ i istotność statystyki $F$ dla zmiany $R^2$ mogą się zmieniać w zależności od tego, w jakiej kolejności dany predyktor zostanie włączony do analizy. W takim wypadku zmiana $R^2$ nie może być interpretowana jako miara siły związku między danym predyktorem i zmienną zależną.

Jak staraliśmy się pokazać wcześniej, analiza danych z Tabeli 1 za pomocą tradycyjnej ANOVA może wymagać trzech kroków (analiza wstępna, analiza efektów prostych i analiza kontrastów). Przy zastosowaniu MR analiza tych samych danych może być przeprowadzona w jednym kroku, który dostarczy wszystkich danych koniecznych do oceny hipotezy badawczej. Wymaga to jednak odpowiedniego zakodowania danych. Nie sama technika kodowania stanowi tu największy problem. Kodowanie zmiennych kategorialnych jest *de facto* definiowaniem kontrastów planowanych: każdy wektor definiuje określoną różnicę między grupami. Wektory te musimy jednak utworzyć przed rozpoczęciem analizy danych. Inaczej mówiąc, musimy już wówczas zdecydować, jakie różnice między grupami będą analizowane. To z kolei wymaga jasno określonych hipotez badawczych. Jeśli badacz dysponuje takimi hipotezami i potrafi je zakodować w postaci odpowiednich wektorów, analiza regresji może udzielić wprost, w jednym kroku, odpowiedzi na pytanie o trafność sformułowanych przez niego hipotez badawczych.

Jeśli hipotezy badawcze są jasno sformułowane, badacz może też zastosować analizę kontrastów planowanych dostępną w programach ANOVA. Może wówczas pominąć wszystkie wstępne kroki analizy (w tym także – wszystkie zbiorcze testy $F$) i ograniczyć się do analizy kontrastów (por. Kirk, 1995; Rosenthal i in., 2000). W takim wypadku, testowanie hipotez badawczych za pomocą MR staje się bardzo podobne do ich testowania za pomocą kontrastów planowanych dostępnych w ANOVA, choć każda z tych metod operuje nieco innym językiem i inaczej definiuje efekty zmiennych.

Jeśli jednak nie dysponujemy precyzyjnymi hipotezami albo badanie nasze ma charakter eksploracyjny, nie mamy też podstaw do definiowania kontrastów planowanych ani do kodowania zmiennych w postaci wektorów. W takim wypadku pozostaje tradycyjna wersja analizy wariancji w połączeniu (jeśli zmienne niezależne mają więcej niż dwa poziomy) z analizą kontrastów *post hoc*, których stosowanie nie wymaga wcześniejszego formułowania hipotez.

Niezależnie jednak od zasadności powyższych argumentów pozostaje faktem, że psychologowie, analizując efekty zmiennych kategorialnych, zdecydowanie przedkładają ANOVA nad MR. Po pierwsze, są lepiej obeznani z pierwszą metodą, po drugie zaś – ANOVA oferuje w wielu wypadkach rozwiązania prostsze niż MR (podstawowe obliczenia do ANOVA można dość łatwo wykonać ręcznie, podczas gdy MR, a zwłaszcza jej bardziej złożone modele, wymagają zasadniczo rachunku macierzowego, por. Cohen i in., 2003; Searle, 2006). Czy jest więc sens zajmować się analizą wielokrotnej regresji liniowej w zastosowaniu do analizy efektów zmiennych kategorialnych? Głównym argumentem przemawiającym za MR jest jej uniwersalność. Można ją stosować niezależnie od tego, czy zmienne niezależne są ciągłe, kategorialne, czy też ciągłe i kategorialne. Zmienne te mogą być zarówno nieskorelowane, jak i skorelowane ze sobą (choć skorelowanie zmiennych niezależnych zawsze komplikuje analizę i interpretację wyników). We wszystkich tych wypadkach możemy zastosować tę samą metodę analizy danych i opisywać wyniki przy użyciu tych samych pojęć. Analiza zmiennych kategorialnych, stanowi natomiast dobre przygotowanie do analizy planów badawczych, w których występują razem zmienne kategorialne i ciągłe. Taki właśnie plan badawczy będzie przedmiotem analizy w następnej części artykułu.

**Podsumowanie**

Interakcję można zdefiniować jako nierówność efektów prostych. Aby takie rozumienie interakcji można było rozciągnąć na zmienne kategorialne mające więcej niż dwa poziomy, ich efekty muszą być zdefiniowane jako kontrasty. Każdy z kontrastów definiuje inny efekt zmiennej. Tradycyjny sposób analizy eksperymentu wieloczynnikowego za pomocą ANOVA, np. eksperymentu opartego na planie A × B (2 × 3), może wymagać niekiedy trzech etapów analizy: (1) analizy ogólnej, (2) analizy efektów prostych (jeśli interakcja A × B okaże się istotna) i (3) analizy kontrastów (jeśli zmienna, której efekt prosty lub główny jest istotny, ma więcej niż dwa poziomy). Jeśli dysponujemy jasną hipotezą badawczą, pozwalającą na sformułowanie kontrastów planowanych, możemy pominąć dwa pierwsze etapy analizy (w tym zbiorcze testy *F*) i ograniczyć się do analizy kontrastów planowanych. W wypadku użycia MR możemy wykonać całą analizę w jednym kroku, ale wymaga to wcześniejszego zakodowania zmiennych kategorialnych w postaci wektorów, które *de facto* definiują kontrasty planowane. W tym ujęciu średnią grupową można przedstawić jako liniową kombinację stałej równania regresji (przy niektórych metodach kodowania jest ona równa średniej ogólnej) oraz efektów głównych i interakcyjnych wektorów. Efekt prosty w takim ujęciu można przedstawić jako sumę wybranych efektów głównych i interakcyjnych.

### Interakcja zmiennej kategorialnej i ciągłej

#### Wprowadzenie

Zajmijmy się teraz interakcją między zmienną kategorialną i zmienną ciągłą. Przez zmienną ciągłą rozumiemy zmienną, która ma nieprzeliczalną liczbę wartości dających się uporządkować pod względem wielkości. Ponieważ w tym artykule zajmujemy się analizą wariancji i analizą regresji, a więc metodami parametrycznymi, ograniczymy się do zmiennych ciągłych mierzonych na skali co najmniej interwałowej. Należy jednak odróżnić zmienną od zbioru danych będących wynikiem jej pomiaru. Lęk uznawany jest za zmienną ciągłą, jeśli jednak zmierzymy go np. kwestionariuszem STAI (por. Wrześniewski, Sosnowski, Jaworowska i Fecenec, 2006) to wynik pomiaru przyjmie jedną z sześćdziesięciu jeden możliwych wartości: od 20 do 80 (test STAI ma 20 pytań i cztery kategorie odpowiedzi od 1 do 4).

Zmienna ciągła może pełnić w badaniu zarówno rolę zmiennej mierzonej, jak i rolę zmiennej manipulowanej. Wyobraźmy sobie eksperyment, w którym badacz mierzy szybkość reakcji motorycznej, a manipuluje siłą bodźca dźwiękowego. Manipulacja może polegać na przykład na tym, że trzem grupom zrandomizowanym przypiszemy wartości siły bodźca równe 70, 80 i 90dB. Chociaż w badaniu mamy do czynienia z trzema dyskretnymi wartościami siły bodźca, to sama zmienna jest ciągła. Ma to istotne konsekwencje zarówno dla sposobu analizy danych, jak i interpretacji wyników. Z jednej strony, jeśli zmienna taka wystąpi jako czynnik w ANOVA, możemy zastosować analizę trendów (wybrane do analizy dyskretne wartości zmiennej ciągłej muszą być wówczas, tak jak w podanym wyżej przykładzie, rozłożone w równych odstępach). Z drugiej strony, zmienną taką możemy włączyć do analizy regresji bez konieczności jej kodowania. Stosując MR, moglibyśmy w szczególności oszacować linię regresji między siłą reakcji a siłą bodźca. Analizę takiego przypadku przedstawiłem już w innym artykule (Sosnowski, 2004b), dlatego w tym miejscu skoncentruję się na analizie planu badawczego, w którym zmienna niezależna ciągła jest zmienną mierzoną. Jest to sytuacja typowa dla badań psychologicznych, w których bardzo często stosowane są testy psychometryczne, a ich wyniki interpretuje się zazwyczaj jako wyniki pomiaru zmiennej ciągłej na skali interwałowej.

Przypuśćmy, że badacza interesuje wpływ stresora (S) i poziomu reaktywności (R) na wielkość reakcji emocjonalnej (E), przy czym stresor jest zmienną dwukategorialną (stresor obecny *vs.* nieobecny), reaktywność jest zmienną ciągłą mierzoną za pomocą kwestionariusza psychologicznego, a reakcja emocjonalna (zmienna zależna) jest również zmienną ciągłą, mierzoną przy użyciu innego kwestionariusza. Analiza takiego przypadku byłaby prosta, gdybyśmy mogli założyć, że obie zmienne niezależne nie wchodzą w interakcję. Moglibyśmy wówczas porównać poziom zmiennej E w grupach różniących się poziomem stresora za pomocą testu *t*-Studenta, natomiast siłę związku między poziomem reaktywności a wielkością reakcji emocjonalnej oszacować w oddzielnej analizie za pomocą współczynnika korelacji prostej. Jeśli jednak liczymy się z możliwością wystąpienia interakcji między obu zmiennymi, musimy włączyć obie do tej samej analizy.

Ponieważ reaktywność jest mierzoną zmienną ciągłą, nie możemy zastosować do analizy naszych danych analizy wariancji. Niekiedy badacze próbują ominąć problem w ten sposób, że dzielą badanych na dwie lub więcej rozłącznych grup ze względu na poziom zmiennej ciągłej (w naszym przykładzie mógłby to być np. podział na osoby wysoko, średnio i nisko reaktywne), aby następnie włączyć utworzoną w ten sposób zmienną kategorialną do analizy wariancji. Nie jest to najlepsza praktyka. Po pierwsze, pojawia się problem, jak pogrupować wartości zmiennej ciągłej. Bardzo często kryteria takiego grupowania są arbitralne albo podyktowane względami pozamerytorycznymi (np. wielkością badanej próby). Po drugie, grupowanie wartości zmiennej ciągłej oznacza zawsze utratę informacji: osoby, które znajdą się w tej samej grupie, będą przecież traktowane tak jakby miały identyczny poziom zmiennej niezależnej, podczas gdy faktycznie różnią się pod tym względem. Cohen i współpracownicy (2003, s. 256) piszą, że „…jeśli zmienna ciągła o rozkładzie normalnym jest zdychotomizowana w punkcie mediany, kwadrat jej korelacji z inną zmienną ciągłą o rozkładzie normalnym zmniejsza się do 0,64 pierwotnej wartości”. Jeśli zdychotomizujemy dwie zmienne ciągłe, aby włączyć je do analizy wariancji, szansa na otrzymanie istotnego efektu interakcji będzie mniejsza, niż gdybyśmy analizowali interakcję między oryginalnymi zmiennymi ciągłymi. Słowo dychotomizacja nie oddaje jednak całej różnorodności procedur stosowanych przez badaczy. Dosłownie rzecz ujmując, dychotomizacja oznacza zaklasyfikowanie wartości zmiennej ciągłej do jednej z dwóch rozłącznych kategorii, zdarza się jednak, że klasyfikujemy je do większej liczby kategorii. Trafniej byłoby więc mówić w takim wypadku o grupowaniu wartości zmiennej ciągłej.

Zmniejszenie mocy testu statystycznego nie jest jedynym problemem związanym z grupowaniem wartości zmiennej ciągłej. W wypadku planów zawierających wiele zmiennych niezależnych grupowanie wartości zmiennych ciągłych może prowadzić do wnioskowania o istnieniu efektu głównego predyktora, gdy go faktycznie nie ma, a w pewnych szczególnych przypadkach – do wnioskowania o istnieniu interakcji predyktorów, gdy jej faktycznie nie ma (Cohen i in., 2003, s. 256). Włączanie do ANOVA pogrupowanych wartości więcej niż jednej zmiennej ciągłej wywołuje jeszcze jedną ważną konsekwencję. Jak wiadomo, ANOVA opiera się na założeniu, że zmienne niezależne są nieskorelowane. Jeśli są to zmienne manipulowalne, a grupy eksperymentalne są równoliczne (czyli mamy do czynienia z tzw. ortogonalnym planem badawczym), założenie o braku korelacji spełnione jest automatycznie. Zmienne mierzone są jednak bardzo często skorelowane ze sobą (a także skorelowane z wieloma zmiennymi nieuwzględnionymi w modelu analizy statystycznej). W takim wypadku wpływ przypisany jednej zmiennej będzie zawierał w sobie część wpływu innej lub innych zmiennych. W konsekwencji – wpływów poszczególnych zmiennych niezależnych nie da się całkowicie oddzielić od siebie. Lepszym rozwiązaniem dyskutowanego tu problemu jest włączenie wszystkich zmiennych niezależnych, tzn. dyskretnych i ciągłych (w ich oryginalnej postaci), do analizy regresji. Tym bardziej że w wypadku prostych planów badawczych (np. planu z jedną zmienną niezależną dwukategorialną i jedną zmienną niezależną ciągłą) analiza taka nie jest zbyt trudna, a stwarza interesujące możliwości interpretacji danych. Bodaj jedynym poważnym argumentem, mogącym przemawiać za grupowaniem wartości zmiennej ciągłej, jest pracochłonność lub kosztowność badania. Jeśli, przykładowo, chcielibyśmy sprawdzić, czy pewna okolica mózgu jest w takim samym stopniu aktywowana u osób wysoko reaktywnych i nisko reaktywnych podczas wykonywania jakiegoś zadania, a badanie mózgu miałoby być przeprowadzone metodą funkcjonalnego rezonansu magnetycznego, to wysokie koszty takiego badania mogłyby nas skłonić do wyselekcjonowania niewielkich grup osób o wysokiej i niskiej reaktywności. W zdecydowanej większości wypadków trudno jednak znaleźć przekonujące uzasadnienie dla grupowania wartości zmiennej, która została wcześniej zmierzona jako ciągła.

**Analiza przykładowych danych**

W Tabeli 6 przedstawiono fikcyjne dane, stanowiące egzemplifikację wspomnianego wyżej planu badawczego, dotyczącego wpływu stresora i reaktywności na wielkość reakcji emocjonalnej. W kolumnach 1–5 tabeli podano kolejno: numer osoby badanej (OB), poziom reaktywności (R), poziom stresora (S), iloczyn zmiennych R i S (RS) oraz wielkość reakcji emocjonalnej (E) będącej zmienną zależną. Zmienna S została przedstawiona od razu w postaci wektora utworzonego metodą kodowania efektów (*effect coding,* por. Sosnowski, 2004b): wartość wektora równa –1 oznacza brak stresora, natomiast wartość równa 1 oznacza jego obecność.

Jeśli przeprowadzamy wieloczynnikową analizę wariancji za pomocą pakietu SPSS, informację o interakcji uzyskamy niejako automatycznie: program wybierze domyślnie (*default*) pełny model czynnikowy i wygeneruje

*Tabela 6.*
Fikcyjne dane dotyczące wpływu stresora (S) i poziomu reaktywności (R) na wielkość reakcji emocjonalnej (E). Zmienna RS jest iloczynem zmiennych R i S; OB oznacza numer osoby badanej

| OB | S | R | RS | E |
|---|---|---|---|---|
| 1 | –1,00 | 20,00 | –20,00 | 40,00 |
| 2 | –1,00 | 22,00 | –22,00 | 42,00 |
| 3 | –1,00 | 26,00 | –26,00 | 44,00 |
| 4 | –1,00 | 28,00 | –28,00 | 46,00 |
| 5 | –1,00 | 32,00 | –32,00 | 44,00 |
| 6 | –1,00 | 34,00 | –34,00 | 50,00 |
| 7 | –1,00 | 36,00 | –36,00 | 52,00 |
| 8 | –1,00 | 42,00 | –42,00 | 50,00 |
| 9 | 1,00 | 20,00 | 20,00 | 40,00 |
| 10 | 1,00 | 22,00 | 22,00 | 42,00 |
| 11 | 1,00 | 26,00 | 26,00 | 48,00 |
| 12 | 1,00 | 28,00 | 28,00 | 52,00 |
| 13 | 1,00 | 34,00 | 34,00 | 56,00 |
| 14 | 1,00 | 34,00 | 34,00 | 62,00 |
| 15 | 1,00 | 36,00 | 36,00 | 64,00 |
| 16 | 1,00 | 40,00 | 40,00 | 68,00 |

tabelę wyników pokazującą zarówno efekty główne, jak i interakcyjne (gdybyśmy chcieli pominąć interakcję, musielibyśmy samodzielnie wybrać z menu odpowiedni model analizy). Program obliczeniowy SPSS do wielokrotnej regresji liniowej działa inaczej. Jeśli np. wprowadzimy do analizy dwie zmienne niezależne (predyktory), uzyskamy równanie regresji z obu tymi zmiennymi ale bez ich interakcji. Inaczej mówiąc, uzyskamy równanie regresji oparte na założeniu, że między obu predyktorami nie zachodzi interakcja. Chcąc oszacować efekt interakcji, musimy wprowadzić do analizy dodatkowy predyktor, będący iloczynem obu zmiennych niezależnych. Zmienna RS w Tabeli 6 jest właśnie takim predyktorem, otrzymanym przez pomnożenie zmiennej R przez zmienną S.

Zmienne niezależne dobrze jest włączać do analizy regresji kolejno (stosując tzw. analizę hierarchiczną). W naszym przypadku zmienne były włączane metodą wprowadzania (*enter*) w kolejności: R, S, RS. W Tabeli 7 podane zostały najważniejsze wyniki analizy naszych danych, tj. współczynniki równania regresji i ich istotność statystyczna dla dwóch kolejnych modeli regresji – bez interakcji (Model 1) i z interakcją (Model 2).

Przyjrzyjmy się teraz wynikom przedstawionym w górnej części Tabeli 7 (Model 1). Dla dwóch zmiennych niezależnych równanie regresji (a dokładniej: wzór na oszacowanie wartości oczekiwanej zmiennej zależnej) ma postać:

(9) $Y' = b_1X + b_2Z + b_0$

Podstawiając do wzoru nasze zmienne, otrzymamy równanie:

$$E' = b_1R + b_2S + b_0$$

*Tabela 7.*
Wyniki dwóch kolejnych modeli analizy regresji – analiza danych z Tabeli 6

| Źródło zmienności | *b* | *t* | *p* |
|---|---|---|---|
| Model 1 | | | |
| Stała | 21,467 | 4,754 | 0,001 |
| Reaktywność (R) | 0,951 | 6,478 | 0,001 |
| Stresor (S) | 4,000 | 4,017 | 0,001 |
| Model 2 | | | |
| Stała | 20,866 | 8,980 | 0,001 |
| Reaktywność (R) | 0,971 | 12,853 | 0,001 |
| Stresor (S) | –9,821 | –4,226 | 0,001 |
| Interakcja R · S (RS) | 0,461 | 6,098 | 0,001 |

Jeśli zaś podstawimy do niego wyniki z Tabeli 7 (Model 1), to otrzymamy:

$$E' = (0{,}951)\,R + (4)\,S + 21{,}467$$

Spróbujmy zinterpretować tę postać równania. Współczynnik $b_0$ oznacza stałą równania regresji, $b_2$ – różnicę między stałymi równania regresji w grupach, a $b_1$ – kąt nachylenia linii regresji E względem R. Dokładna interpretacja tych współczynników zależy od sposobu zakodowania zmiennej grupowej. W tym miejscu ograniczymy się do analizy danych, w których zmienna kategorialna zakodowana została metodą kodowania efektów[6]. Przy takiej metodzie kodowania $b_0$ jest równe stałej równania regresji dla całej próby, natomiast $b_2$ oznacza różnicę między stałą równania regresji w danej grupie a stałą w całej próbie. Ogólnie (niezależnie od sposobu kodowania), stała równania regresji w wybranej grupie $b_{0(G)}$ równa się:

(10) $b_{0(G)} = b_0 + b_2G$

gdzie $b_0$ oznacza stałą dla ogólnego równania regresji, $G$ – wartość liczbową wektora przypisaną danej grupie, a $b_2$ – współczynnik regresji związany z tym wektorem. Ponieważ zmienna S przybiera wartości 1 i –1, stała równania regresji w grupie ze stresem będzie równa: $b_{0(1)} = 21{,}467 + 4 \cdot 1 = 25{,}467$, a w grupie bez stresu będzie równa: $b_{0(-1)} = 21{,}467 + 4 \cdot (-1) = 17{,}467$. Współczynnik $b_1$ wyznacza kąt nachylenia linii regresji E względem R w całej próbie. W modelu bez interakcji zakładamy, że nachylenie linii regresji w obu grupach jest takie samo, jak w całej próbie, a różnica między grupowymi liniami regresji jest jednakowa dla wszystkich wartości zmiennej ciągłej i jest równa różnicy między stałymi równania regresji dla obu grup. Współczynnik $b_1$ możemy więc interpretować jako miarę efektu głównego zmiennej Reaktywność. Podobnie współczynnik $b_2$ możemy traktować jako miarę efektu głównego zmiennej Stresor, równego wszystkim jej efektom prostym (oszacowanym dla poszczególnych poziomów reaktywności).

Drugi krok analizy (Model 2) pokazuje jednak, że między zmiennymi R i S zachodzi interakcja. Świadczy o tym istotny statystycznie współczynnik $b_3$. Musimy więc uwzględnić w analizie bardziej złożone równanie regresji:

(11) $E' = b_1R + b_2S + b_3RS + b_0$

Po podstawieniu do równania (11) wartości współczynników z Tabeli 7, otrzymamy:

$$E' = (0{,}971)\,R + (-9{,}821)\,S + (0{,}461)\,RS + 20{,}866$$

Jak należy interpretować równanie regresji uwzględniające interakcję zmiennej ciągłej i kategorialnej? Interakcja oznacza, że linie regresji E względem R w obu grupach różnią się nachyleniem. Współczynnik $b_1$ z ogólnego równania regresji jest średnią współczynników kierunkowych z obu grup[7]. Skoro tak, to współczynnik $b_1$ z Modelu 2 nie powinien się różnić od współczynnika $b_1$ dla całej próby (z Modelu 1). Tabela 7 pokazuje, że wartości obu współczynników są bardzo zbliżone do siebie, ale nie są równe. Skąd się bierze ta różnica? Współczynnik $b_1$ w Modelu 2 jest prostą nieważoną średnią obu współczynników grupowych, co zresztą łatwo sprawdzić: (1,432 + 0,51) / 2 = 0,971. Byłby on równy współczynnikowi $b_1$ z Modelu 1, gdybyśmy obliczyli go jako średnią ważoną współczynników grupowych. Wspólny ważony współczynnik kierunkowy, uśredniony dla $k$ grup (*common regression coefficient* – $b_c$), można obliczyć za pomocą wzoru:

$$(12) \qquad b_c = \frac{\sum x_1^2 b_1 + \sum x_2^2 b_2 + \ldots + \sum x_k^2 b_k}{\sum x_1^2 + \sum x_2^2 + \ldots + \sum x_k^2}$$

gdzie: $\sum x_i^2$ oznacza sumę kwadratów zmiennej ciągłej w i-tej grupie, a $b_i$ – współczynnik kierunkowy w tejże grupie (Pedhazur, 1982, s. 438–445).

Stosując wzór (12) do naszych wyników (dane potrzebne do wzoru możemy łatwo uzyskać, przeprowadzając w każdej z grup oddzielną analizę regresji z R jako jedynym predyktorem), otrzymujemy:

$$b_c = \frac{384 \cdot 0,51 + 352 \cdot 1,432}{384 + 352} = 0,951$$

Jest to dokładnie tyle, ile wynosi współczynnik $b_1$ w Modelu 1. Nietrudno zauważyć, że gdyby sumy kwadratów zmiennej R w obu grupach były równe, współczynnik ważony byłby równy prostej (nieważonej) średniej współczynników grupowych i nie byłoby różnicy między wartością $b_1$ w Modelu 1 i w Modelu 2. W wypadku naszych danych sumy kwadratów nie są jednak równe.

W analizie interakcji interesują nas jednak nie tyle efekty główne, co efekty proste. W przypadku naszych danych występują dwa rodzaje takich efektów: (1) różnica między nachyleniem linii regresji E względem R w grupie ze stresem i w grupie bez stresu (czyli – efekty proste zmiennej R dla S = 1 i dla S = –1) oraz (2) różnice (odległości) między wewnątrzgrupowymi liniami regresji dla różnych poziomów Reaktywności (czyli efekty proste S dla różnych wartości R). Omówię teraz dokładnie te efekty, natomiast ogólniejsze ujęcie analizy efektów prostych w modelach z interakcją przedstawię w następnej części artykułu poświęconej interakcji zmiennych ciągłych.

Korzystając z wyników zamieszczonych w Tabeli 7, możemy w prosty sposób obliczyć nachylenie linii regresji dla obu naszych grup. Współczynnik kierunkowy regresji prostej w danej grupie $b_{1(G)}$ równa się:

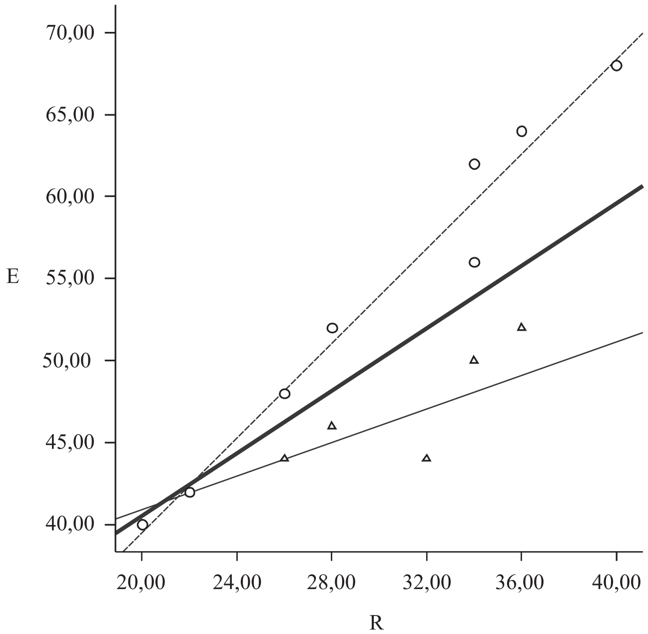
$$(13) \qquad b_{1(G)} = b_1 + b_3 G,$$

gdzie $b_1$ to współczynnik kierunkowy z ogólnego równania regresji, $b_3$ to współczynnik regresji związany z interakcją predyktorów, a $G$ to wartość wektora w danej grupie. W grupie ze stresem współczynnik kierunkowy będzie równy $b_{1(1)} = 0,971 + 0,461 = 1,432$, natomiast w wypadku grupy bez stresu: $b_{1(-1)} = 0,971 - 0,461 = 0,510$. Ponieważ nachylenie linii regresji E względem R w grupie ze stresorem jest większe niż w grupie bez stresora, a różnica ta jest istotna (o czym świadczy istotność współczynnika $b_3$), mamy prawo powiedzieć, że wpływ reaktywności na reakcję emocjonalną zależy od obecności stresora: wpływ ten jest większy w warunkach stresowych niż w warunkach bezstresowych. Używając innej terminologii, moglibyśmy nazwać S zmienną moderującą (*moderator variable*) i powiedzieć, że stres wywiera moderujący wpływ na zależność między reaktywnością i siłą reakcji emocjonalnej: zależność ta zmienia się zależnie od poziomu stresora.

W podobnie prosty sposób możemy policzyć stałe równania regresji ($b_0$) dla obu grup. Analogicznie jak w modelu bez interakcji, stałe te otrzymamy, dodając (znowu: raz ze znakiem plus, drugi raz ze znakiem minus) współczynnik kierunkowy dla stresora ($b_2$) do stałej równania regresji z ogólnego równania regresji ($b_0$). W grupie bez stresora stała równania regresji wynosi: $b_{0(-1)} = 20,866 + 9,821 = 30,688$, natomiast w grupie ze stresorem wynosi: $b_{0\,(+1)} = 20,866 + (-9,821) = 11,045$. Linie regresji dla obu naszych grup i dla całej próby zostały pokazane na Rysunku 3[8].

Różnica między stałymi wewnątrzgrupowych równań regresji nie jest jednak dobrą miarą różnicy między grupami w modelu z interakcją. Gdyby obie linie regresji były równoległe to różnica między stałymi (czyli – różnica między linami regresji w punkcie R = 0) byłaby taka sama, jak różnica między liniami regresji dla każdej innej wartości R. Ponieważ jednak linie te nie są równoległe, różnica między nimi zmienia się w miarę jak przesuwamy się wzdłuż osi zmiennej R. Mówiąc inaczej, efekty proste stresora są różne dla różnych wartości reaktywności. Potrzebna jest więc bardziej szczegółowa analiza tych efektów.

Jeśli wewnątrzklasowe linie regresji nie są równoległe, to muszą się gdzieś przeciąć: bądź wewnątrz przedziału




*Rysunek 3.*
Linia regresji reakcji emocjonalnej (E) względem poziomu reaktywności (R) dla całej próby (gruba linia ciągła) oraz dla grup badanych w warunkach stresu (cienka linia przerywana) i bez stresu (cienka linia ciągła). Znaczniki okrągłe – osoby badane w stresie, znaczniki trójkątne – osoby badane bez stresu.

wartości zmiennej ciągłej uwzględnionego w badaniu (u nas jest to przedział od 20 do 40) bądź poza tym przedziałem. W pierwszym wypadku mówimy o interakcji krzyżowej (*crossover interaction*), w drugim – o interakcji niekrzyżowej (*noncrossover interaction*). Zazwyczaj interesuje nas przedział wartości uwzględniony w badaniu. Punkt na osi zmiennej ciągłej, w którym następuje takie przecięcie, możemy łatwo oszacować (Pedhazur, 1982, s. 462) za pomocą wzoru:

$$(14) \quad X_{cross} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1}$$

Symbole $a_1$ i $a_2$ oznaczają tu stałe równania regresji dla grup 1 i 2 (w naszym przykładzie, odpowiednio, dla grup zakodowanych jako –1 i 1), natomiast $b_1$ i $b_2$ to współczynniki nachylenia linii regresji dla tychże grup. W przypadku naszych danych przecięcie wewnątrzgrupowych linii regresji E względem R będzie miało miejsce w punkcie, w którym poziom reaktywności ($R_{cross}$) równa się:

$$R_{cross} = \frac{30,687 - 11,045}{1,432 - 0,51} = \frac{19,642}{0,922} \approx 21,30$$

Przecięcie obu linii regresji w wyliczonym przez nas punkcie jest widoczne na zaprezentowanym wcześniej Rysunku 3.

Cohen i współpracownicy (2003, s. 288; por. też Aiken i West, 1991, s. 24) podają inną wersję wzoru na punkt przecięcia linii regresji (patrz: dalsza część tego artykułu dotycząca interakcji zmiennych ciągłych):

$$(15) \quad X_{cross} = \frac{-b_2}{b_3}$$

gdzie $b_2$ i $b_3$ zachowują to samo znaczenie, co we wcześniejszych analizach.

Wzór ten nie różni się faktycznie od podanego wcześniej wzoru (14). Zauważmy bowiem, że współczynnik $b_2$ oznacza różnicę między stałymi dwóch równań regresji prostej, a współczynnik $b_3$ – różnicę między ich współczynnikami kierunkowymi. Wzór (15) pokazuje natomiast wyraźnie, że kiedy współczynnik $b_3$ jest równy 0, to punkt przecięcia linii regresji nie istnieje, inaczej mówiąc – linie te są równoległe. Jak nietrudno przewidzieć, wzór (15) prowadzi do identycznego wyniku, co uzyskany wcześniej za pomocą wzoru (14): $R_{cross} = -b_2 / b_3 = -(-9,821) / 0,461 \approx 21,30$.

Ponieważ linie regresji przecinają się, to, w miarę oddalania się w jedną lub drugą stronę od punktu ich przecięcia, różnice między liniami regresji (grupami) będą się zwiększać. Możemy więc zapytać, dla jakiego przedziału wartości zmiennej ciągłej różnice między obu liniami regresji są nieistotne, a dla jakiego przedziału jej wartości różnice te stają się istotne. Krytyczny przedział nieistotności rozciągający się na osi zmiennej R po obu stronach punktu $R_{cross}$ można oszacować za pomocą techniki Johnsona–Neymana (Johnson i Neyman, 1936, zob. też Aiken i West, 1991; Cohen i in., 2003; Pedhazur, 1982). Ręczne obliczenia w oparciu o podane tam wzory są jednak dość żmudne i łatwo popełnić w nich błąd. Lepiej napisać do takich obliczeń krótki program komputerowy. Można też skorzystać z programu, który opracowałem i umieściłem w Internecie pod adresem http://www.psychologia.pl/rlinescross/. Podane są tam też dokładne wzory obliczeniowe.

Obliczenia wykonane za pomocą opisanej wyżej metody wykazały, że przedział nieistotności zawiera się między wartościami $R_{dolne} = 15,63$ i $R_{górne} = 24,44$. Oznacza to, że osoby, których reaktywność mieści się w tym przedziale (a praktycznie, po zaokrągleniu do wartości całkowitych, między 16 i 24), powinny wykazywać taką samą reakcję emocjonalną w warunkach stresowych i bezstresowych. Jeśli reaktywność badanych jest wyższa od 24, to ich przewidywane reakcje emocjonalne będą większe w warunkach stresowych niż bezstresowych, jeśli natomiast reaktywność badanych jest niższa od 16, to ich przewidywane reakcje emocjonalne będą większe w warunkach bezstresowych niż stresowych. Ten ostatni wniosek jest jednak tylko ekstrapolacją, i to mającą wątpliwy sens empiryczny, ponieważ reaktywność mierzona w naszym badaniu nie przybiera wartości mniejszych niż 20.

Na koniec warto zaznaczyć, że najbardziej wiarygodne oszacowanie granic regionu nieistotności uzyskujemy wówczas, gdy porównywane grupy są zrandomizowane. W innych wypadkach musimy się liczyć z ryzykiem, że estymator błędu w równaniu regresji nie będzie estymatorem nieobciążonym (por. Aiken i West, 1991; Pedhazur, 1982).

### Podsumowanie

Analiza regresji umożliwia analizę interakcji między zmienną ciągłą i zmienną kategorialną. Wymaga to odpowiedniego zakodowania zmiennej kategorialnej. Jeśli nie ma interakcji między zmienną ciągłą X i zmienną dwukategorialną Z, nachylenie linii regresji zmiennej zależnej Y względem X jest takie samo w obu grupach (dla obu poziomów zmiennej Z). Jeśli natomiast zachodzi interakcja, wewnątrzgrupowe linie regresji nie są równoległe. Oznacza to, że wpływ zmiennej ciągłej na zmienną zależną jest różny w obu grupach. Mówimy w takim wypadku, że Z moderuje wpływ X na Y. Interakcja oznacza też, że różnica między wewnątrzgrupowymi liniami regresji zmienia się w miarę jak przesuwamy się wzdłuż osi zmiennej ciągłej. Dysponujemy metodą pozwalającą oszacować, w jakim punkcie zmiennej ciągłej dwie linie regresji prostej przetną się oraz dla jakiego przedziału zmiennej X różnice między wysokością obu linii regresji będą nieistotne, a dla jakich wartości X będą one istotne.

## Interakcja zmiennych ciągłych

### Wprowadzenie

Przyjrzyjmy się teraz interakcji dwóch zmiennych ciągłych. Wyobraźmy sobie, że badamy wpływ poziomu inteligencji (X) i poziomu motywacji (Z), mierzonych testami psychometrycznymi, na poziom wykonania zadań arytmetycznych (Y), przy czym interesują nas zarówno efekty główne obu zmiennych niezależnych, jak i ich interakcja. Tabela 8 zawiera fikcyjne dane z takiego badania[9]. Zmienna OB to numer osoby badanej, X, Z i Y to opisane wyżej zmienne ciągłe, natomiast zmienna XZ jest wynikiem pomnożenia X przez Z i reprezentuje interakcję obu tych zmiennych. Pozostałe zmienne w tabeli (kolumny 6–8) to zmienne scentrowane, które zostaną wykorzystane później.

Na początku warto postawić pytanie, co oznacza interakcja zmiennych ciągłych. Jeśli między nimi nie zachodzi interakcja, wówczas kąt nachylenia linii regresji Y względem X jest taki sam dla wszystkich wartości Z, a kąt nachylenia linii regresji Y względem Z jest taki sam dla wszystkich wartości X. Kąty te są wyznaczone przez współczynniki kierunkowe dla każdej ze zmiennych niezależnych. Zatem jeśli nie ma interakcji, współczynnik kierunkowy dla X będzie taki sam dla wszystkich wartości Z, a współczynnik kierunkowy dla Z będzie taki sam dla wszystkich wartości X. Graficzną ilustracją takiego równania regresji będzie płaszczyzna regresji (powierzchnia płaska), nachylona pod stałym kątem względem osi X i pod stałym kątem względem osi Z. Sytuację taką ilustruje część A Rysunku 4. Oczekiwana wartość zmiennej zależnej (*Y'*), przewidywanej dla wybranych wartości X = i oraz Z = j, będzie równa odległości między płaszczyzną regresji a płaszczyzną poziomą, przecinającą oś Y w punkcie 0, zmierzonej w punkcie o współrzędnych

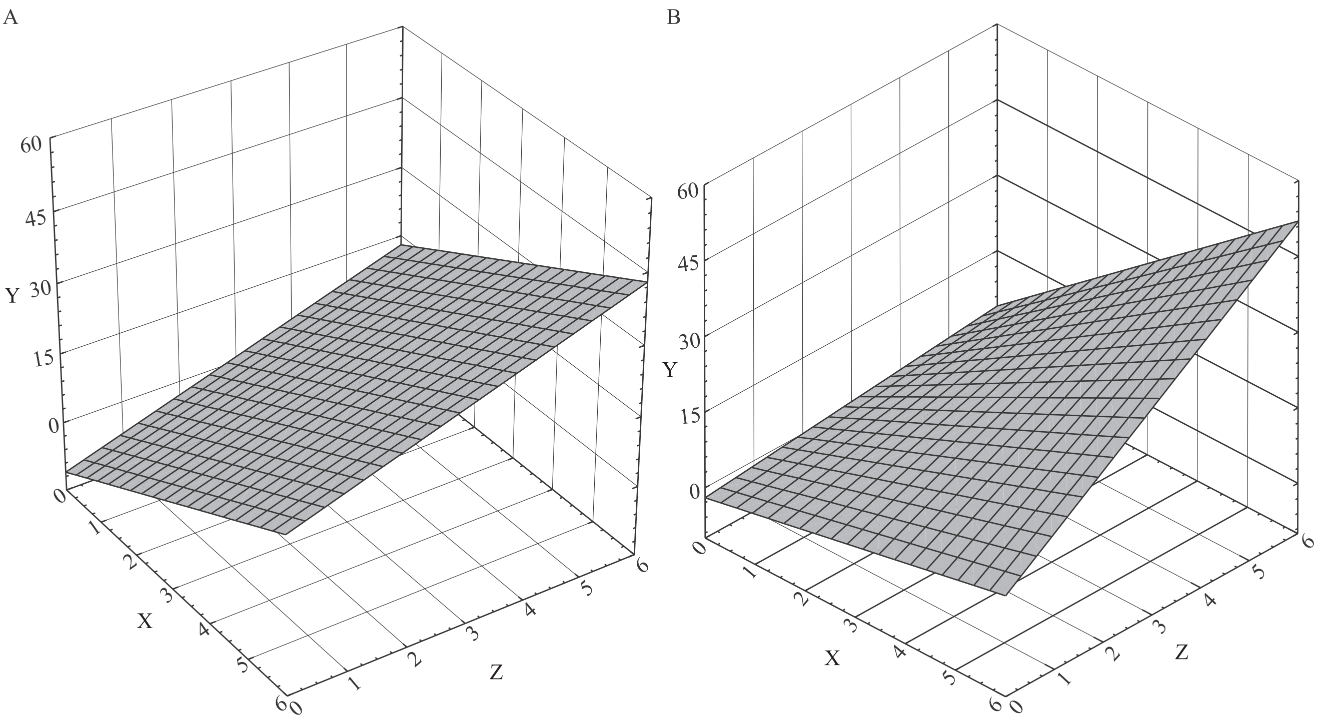
*Tabela 8.*
Fikcyjne dane ilustrujące wpływ poziomu inteligencji (X), poziomu motywacji (Z) oraz ich interakcji (XZ) na poziom wykonania zadań umysłowych (Y). Symbolami Xc, Zc i XcZc oznaczono te same zmienne niezależne w postaci scentrowanej. Symbol OB oznacza numer osoby badanej

| OB | X | Z | XZ | Y | Xc | Zc | XcZc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 10,00 | –5,00 | –5,00 | 25,00 |
| 2 | 0,00 | 2,00 | 0,00 | 11,00 | –5,00 | –3,00 | 15,00 |
| 3 | 0,00 | 4,00 | 0,00 | 12,00 | –5,00 | –1,00 | 5,00 |
| 4 | 0,00 | 6,00 | 0,00 | 13,00 | –5,00 | 1,00 | –5,00 |
| 5 | 0,00 | 8,00 | 0,00 | 14,00 | –5,00 | 3,00 | –15,00 |
| 6 | 0,00 | 10,00 | 0,00 | 16,00 | –5,00 | 5,00 | –25,00 |

*Tabela 8 – cd.*

| OB | X | Z | XZ | Y | Xc | Zc | XcZc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 2,00 | 0,00 | 0,00 | 10,00 | –3,00 | –5,00 | 15,00 |
| 8 | 2,00 | 2,00 | 4,00 | 13,00 | –3,00 | –3,00 | 9,00 |
| 9 | 2,00 | 4,00 | 8,00 | 15,00 | –3,00 | –1,00 | 3,00 |
| 10 | 2,00 | 6,00 | 12,00 | 17,00 | –3,00 | 1,00 | –3,00 |
| 11 | 2,00 | 8,00 | 16,00 | 18,00 | –3,00 | 3,00 | –9,00 |
| 12 | 2,00 | 10,00 | 20,00 | 21,00 | –3,00 | 5,00 | –15,00 |
| 13 | 4,00 | 0,00 | 0,00 | 12,00 | –1,00 | –5,00 | 5,00 |
| 14 | 4,00 | 2,00 | 8,00 | 14,00 | 1,00 | –3,00 | 3,00 |
| 15 | 4,00 | 4,00 | 16,00 | 16,00 | –1,00 | –1,00 | 1,00 |
| 16 | 4,00 | 6,00 | 24,00 | 20,00 | –1,00 | 1,00 | –1,00 |
| 17 | 4,00 | 8,00 | 32,00 | 24,00 | –1,00 | 3,00 | –3,00 |
| 18 | 4,00 | 10,00 | 40,00 | 28,00 | –1,00 | 5,00 | –5,00 |
| 19 | 6,00 | 0,00 | 0,00 | 16,00 | 1,00 | –5,00 | –5,00 |
| 20 | 6,00 | 2,00 | 12,00 | 18,00 | 1,00 | –3,00 | –3,00 |
| 21 | 6,00 | 4,00 | 24,00 | 22,00 | 1,00 | –1,00 | –1,00 |
| 22 | 6,00 | 6,00 | 36,00 | 22,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| 23 | 6,00 | 8,00 | 48,00 | 24,00 | 1,00 | 3,00 | 3,00 |
| 24 | 6,00 | 10,00 | 60,00 | 26,00 | 1,00 | 5,00 | 5,00 |
| 25 | 8,00 | 0,00 | 0,00 | 16,00 | 3,00 | –5,00 | –15,00 |
| 26 | 8,00 | 2,00 | 16,00 | 20,00 | 3,00 | –3,00 | –9,00 |
| 27 | 8,00 | 4,00 | 32,00 | 22,00 | 3,00 | –1,00 | –3,00 |
| 28 | 8,00 | 6,00 | 48,00 | 24,00 | 3,00 | 1,00 | 3,00 |
| 29 | 8,00 | 8,00 | 64,00 | 24,00 | 3,00 | 3,00 | 9,00 |
| 30 | 8,00 | 10,00 | 80,00 | 28,00 | 3,00 | 5,00 | 15,00 |
| 31 | 10,00 | 0,00 | 0,00 | 16,00 | 5,00 | –5,00 | –25,00 |
| 32 | 10,00 | 2,00 | 20,00 | 22,00 | 5,00 | –3,00 | –15,00 |
| 33 | 10,00 | 4,00 | 40,00 | 28,00 | 5,00 | –1,00 | –5,00 |
| 34 | 10,00 | 6,00 | 60,00 | 32,00 | 5,00 | 1,00 | 5,00 |
| 35 | 10,00 | 8,00 | 80,00 | 36,00 | 5,00 | 3,00 | 15,00 |
| 36 | 10,00 | 10,00 | 100,00 | 40,00 | 5,00 | 5,00 | 25,00 |

(i, j). Jeśli zachodzi interakcja między X i Z, nachylenie linii regresji Y względem X będzie się zmieniać jako funkcja Z i jednocześnie nachylenie regresji Y względem Z będzie się zmieniać jako funkcja X (interakcja między X i Z jest pod tym względem symetryczna). Płaszczyzna regresji ulegnie więc skręceniu. Efekt ten można porównać do skręcenia napiętej drabinki sznurowej z drewnianymi szczeblami, otrzymanego w wyniku obrotu jej najniższego szczebla wokół osi podłużnej drabinki przy ustalonym szczeblu najwyższym. Mimo skręcenia drabinki, szczeble będą oczywiście tworzyć linie proste, a napięte sznury boczne będą również tworzyć linie proste (analiza regresji pozwala też badać zależności krzywoliniowe, ale problem ten nie będzie tu omawiany). Odległość między taką skręconą, ale wyścieloną liniami prostymi powierzchnią regresji a płaską powierzchnią (płaszczyzną) regresji, jaką otrzymalibyśmy bez uwzględnienia interakcji, stanowi graficzną ilustrację efektu interakcji. Interakcję zmiennych ciągłych ilustruje część B Rysunku 4. Jak widać, kąt nachylenia linii regresji Y względem Z jest niewielki dla małych wartości X. W miarę jednak jak X rośnie, nachylenie linii regresji staje się coraz większe. Podobnie jest




*Rysunek 4.*
Schematyczny rysunek ilustrujący płaszczyznę regresji Y względem dwóch zmiennych ciągłych: X i Z. Część A ilustruje przypadek bez interakcji zmiennych niezależnych, część B ilustruje interakcję zmiennych niezależnych. Rysunek wykonano za pomocą programu graficznego pakietu statystycznego STATISTICA, wersja 8.

w wypadku linii regresji Y względem X. Dla małych wartości Z linie regresji mają mały kąt nachylenia. W miarę jednak jak Z rośnie, linie regresji stają się coraz bardziej strome.

*Tabela 9.*
Współczynniki równania regresji (analiza danych z Tabeli 8)

| Źródło zmienności | *b* | *t* | *p* |
|---|---|---|---|
| Model 1 | | | |
| Stała | 6,214 | 6,523 | 0,001 |
| Inteligencja (X) | 1,486 | 12,247 | 0,001 |
| Motywacja (Z) | 1,271 | 10,481 | 0,001 |
| Model 2 | | | |
| Stała | 9,224 | 8,640 | 0,001 |
| Inteligencja (X) | 0,884 | 5,012 | 0,001 |
| Motywacja (Z) | 0,669 | 3,797 | 0,001 |
| Interakcja X · Z (XZ) | 0,120 | 4,135 | 0,001 |

**Analiza przykładowych danych**

Tabela 9 przedstawia analizę danych z Tabeli 8. Górna część tabeli (Model 1) prezentuje wyniki analizy, w której uwzględniono wyłącznie predyktory X i Z. Jest to więc model regresji oparty na założeniu, że między zmiennymi X i Z nie zachodzi interakcja. Dolna część tabeli (Model 2) prezentuje analizę uwzględniającą interakcję zmiennych X i Z.

Równanie regresji dla Modelu 1 ma postać:

$$Y' = b_1X + b_2Z + b_0 \quad (16)$$

Po podstawieniu do równania danych z Tabeli 9 równanie to będzie miało postać:

$$Y' = 1{,}486\ X + 1{,}271\ Z + 6{,}214$$

Stała równania regresji ($b_0$) oznacza wartość, którą przybiera Y, kiedy obie zmienne niezależne są równe 0. Współczynnik $b_1$ jest miarą efektu głównego zmiennej X a $b_2$ – miarą efektu głównego zmiennej Z. Opierając się na wynikach przedstawionych w Tabeli 9, możemy powiedzieć, że gdy obie zmienne niezależne mają wartość 0, oczekiwana wartość zmiennej zależnej (*Y'*) jest równa: $b_0 = 6{,}214$. Jeśli wartość X zwiększy się o *k* jednostek to, zakładając, że Z nie ulegnie zmianie, oczekiwana wartość Y zwiększy się o $k \cdot 1{,}486$ jednostek. Analogiczna zmiana Z spowoduje zmianę *Y'* o $k \cdot 1{,}271$ jednostek.

Drugi model analizy uwzględnia interakcję zmiennych X i Z. Równanie regresji przybiera w tym wypadku postać:

$$Y' = b_1X + b_2Z + b_3XZ + b_0 \qquad (17)$$

Podstawiając do równania (17) dane z Tabeli 9, otrzymamy następującą jego postać:

$$Y' = 0{,}884\ X + 0{,}669\ Z + 0{,}120\ XZ + 9{,}224$$

Gdybyśmy nie wprowadzili do analizy predykatora XZ, związana z nim suma kwadratów powiększyłaby resztową (*residual*) sumę kwadratów, czyli sumę kwadratów błędu. Gdybyśmy przeanalizowali tabelę „Analiza wariancji" (jedną z tabel prezentujących wyniki analizy regresji wielokrotnej), to stwierdzilibyśmy, że z całkowitej sumy kwadratów zmiennej Y równej $SS_c = 1810$, na dwie zmienne uwzględnione w Modelu 1 przypada suma kwadratów równa: $SS_{regr} = 1606{,}029$, podczas gdy resztowa suma kwadratów równa się: $SS_{res} = 203{,}971$. W Modelu 2, suma kwadratów przewidywana przez trzy predyktory (X, Z i XZ) wzrasta do: $SS_{regr} = 1677{,}069$, a resztowa suma kwadratów zmniejsza się do: $SS_{res} = 132{,}931$. Różnica między $R^2$ dla Modelu 2 i dla Modelu 1 wynosi: $R^2_{Y.X,Z,XZ} - R^2_{Y.X,Z} = 0{,}927 - 0{,}887 = 0{,}039$ i jest istotna statystycznie, na co wskazuje test *F* dla zmiany $R^2$ ($F_{change}$), który wynosi w tym wypadku: $F(1,\ 32) = 17{,}101$, $p = 0{,}001$. Oznacza to, że uwzględnienie interakcji prowadzi do istotnego zwiększenia sumy kwadratów przewidywanej przez równanie regresji. Oczywiście, badacz może świadomie pominąć interakcję, jeśli ma podstawy, aby przyjąć, że interakcja nie zachodzi. Założenia takiego często jednak nie sprawdzamy, a być może nawet nie uświadamiamy sobie, że wprowadzając do analizy jedynie zmienne niezależne, przyjmujemy milcząco założenie o braku interakcji między nimi.

Aby mówić o wpływie poszczególnych predyktorów, musimy oczywiście sprawdzić, czy jest on istotny. Jak wynika z Tabeli 9 zarówno efekty zmiennych X i Z, jak i ich interakcja są istotne na poziomie $p = 0{,}001$. Interpretacja współczynników regresji w modelu z interakcją różni się jednak w sposób zasadniczy od ich interpretacji w modelu bez interakcji, o czym będzie obszernie mowa dalej.

**Analiza efektów prostych**

Pojawia się pytanie, jak analizować efekty proste, jeśli predyktory są zmiennymi ciągłymi, a więc przybierają wielką (teoretycznie – nieprzeliczalną) liczbę wartości. Nie możemy przecież analizować nieprzeliczalnej liczby efektów prostych. Możemy jednak poddać analizie niektóre z nich, najbardziej nas interesujące. Możemy mianowicie przeprowadzić analizę regresji zmiennej zależnej względem jednego z predyktorów dla kilku wybranych wartości drugiego predyktora (Cohen i in., 2003; por. też Aiken i West, 1991; Jaccard i Turrisi, 2003). Regresję taką, przez analogię do efektu prostego w ANOVA, określamy jako regresję prostą (*simple regression*). Analogicznie, mówimy o równaniu regresji prostej (*simple regression equation*) i o współczynniku nachylenia regresji prostej (*simple slope*) (Aiken i West, 1991; por. także Cohen i in., 2003).

Przeanalizujmy jeszcze raz ogólną postać równania regresji, zapisaną wcześniej jako wzór (17): $Y' = b_1X + b_2Z + b_3XZ + b_0$. Równanie to możemy łatwo przeformułować do postaci umożliwiającej zdefiniowanie współczynników równania regresji prostej, na przykład – współczynników regresji prostej Y względem X (por. Cohen i in., 2003, s. 270–271):

$$Y' = (b_1 + B_3 Z)X + (b_2 Z + b_0) \qquad (18)$$

Analogiczne równanie, pozwalające zdefiniować współczynniki regresji prostej Y względem Z, miałoby postać:

$$Y' = (b_2 + B_3 X)Z + (b_1X + b_0) \qquad (19)$$

Przeanalizujmy teraz dokładnie równanie (18). Wyrażenie $(b_1 + B_3Z)$ stanowi współczynnik nachylenia (*slope*) linii regresji prostej Y względem X dla określonej wartości Z, natomiast wyrażenie $(b_2Z + b_0)$ to stała tegoż równania. Z wzorów tych wynika kilka bardzo ważnych wniosków dotyczących interpretacji współczynników równania regresji prostej. Zauważmy, że gdy $b_3 = 0$ (to znaczy, gdy nie ma interakcji między X i Z), to, niezależnie od wartości Z, współczynnik nachylenia linii regresji prostej Y względem X równa się: $b_1 + 0 \cdot Z = b_1$. Oznacza to, że wszystkie współczynniki regresji prostej Y względem X są wtedy sobie równe (wszystkie linie regresji prostej mają ten sam kąt nachylenia) lub też, inaczej mówiąc – wszystkie efekty proste zmiennej X są sobie równe, a tym samym są też równe efektowi głównemu tej zmiennej. Z analizy równania (18) wynika też, że gdy Z = 0, współczynnik nachylenia linii regresji prostej Y względem X równa się $b_1$, a stała takiego równania równa się $b_0$. Inaczej mówiąc, współczynniki $b_0$ i $b_1$ z ogólnego równania regresji w modelu z interakcją są współczynnikami równania regresji prostej Y względem X dla Z = 0. W naszym przypadku, równanie regresji prostej Y względem X dla Z = 0 (a ściślej – oszacowanie wartości oczekiwanej Y dla takich warunków) miałoby postać:

$$Y'_{(Z = 0)} = 0{,}884 \cdot X + 9{,}224$$

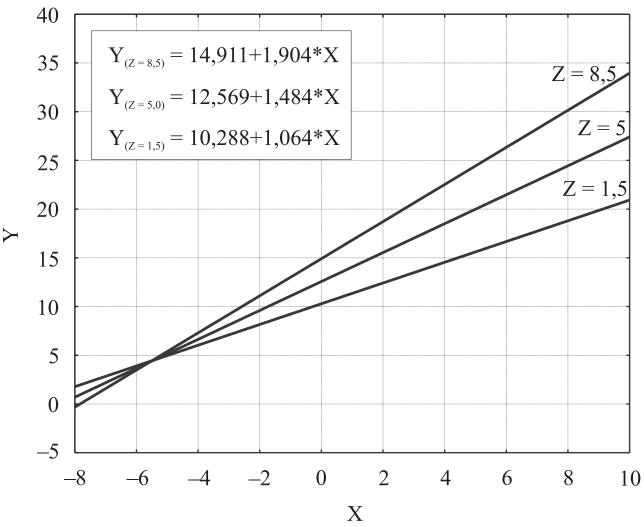
W podobny sposób możemy oszacować równanie regresji prostej Y względem Z dla X = 0. Miałoby ono postać: $Y'_{(X = 0)} = 0{,}669 \cdot Z + 9{,}224$. Podana wyżej interpretacja współczynników kierunkowych regresji zachowuje swoją ważność również gdy nie ma interakcji: w modelu bez interakcji współczynnik $b_1$ informuje także o nachyleniu linii regresji Y względem X dla Z = 0. Tyle tylko, że wówczas współczynnik ten ma taką samą wartość dla wszystkich wartości Z. Natomiast w wypadku interakcji, współczynnik kierunkowy dla Z = 0 różni się od współczynników kierunkowych dla innych wartości Z. Mówiąc inaczej, efekt prosty X dla Z = 0 nie będzie wówczas równy efektowi prostemu X dla innych wartości Z.

Podstawiając za zmienną Z dowolną jej wartość różną od zera (oznaczmy ją symbolem $Z_i$), możemy łatwo oszacować za pomocą wzoru (18) współczynniki równania regresji prostej Y względem X dla takiego Z. Wzór (18) zachowuje ważność także wtedy, gdy Z przybiera tylko dwie wartości – to znaczy, gdy Z jest wektorem kodującym zmienną kategorialną. Czytelnik może, dla sprawdzenia, zastosować ten wzór do oszacowania współczynników regresji prostej dla grup badanych w stresie i bez stresu (dane z Tabeli 6), wykorzystując do tego wyniki analizy regresji dla modelu z interakcją (Model 3) przedstawione w Tabeli 7.

Powstaje problem, jaką wartość lub wartości $Z_i$ wybrać do analizy. Niekiedy za takim wyborem mogą przemawiać względy merytoryczne. Przykładowo, gdyby zmiennymi niezależnymi były poziom motywacji i iloraz inteligencji (II) mierzony Testem Wechslera dla Dorosłych, badacz mógłby być np. zainteresowany wpływem motywacji na poziom osiągnięć zawodowych osób z *II* = 90 i *II* = 109, odpowiadającymi dolnej i górnej granicy inteligencji przeciętnej (por. Brzeziński i in., 2004). Często jednak brakuje przesłanek merytorycznych dla takiego wyboru. Możemy wówczas oprzeć się na kryteriach statystycznych i wybrać np. wartości zmiennej równe jej średniej arytmetycznej (*M*), jednemu odchyleniu standardowemu powyżej średniej (*M* + *SD*) i jednemu odchyleniu poniżej średniej (*M* – *SD*). Spróbujmy zastosować taką metodę analizy do danych z Tabeli 8 i oszacować współczynniki równań regresji prostej Y względem X dla trzech zaproponowanych wyżej wartości Z. Z tabeli SPSS, prezentującej statystyki opisowe naszych zmiennych, możemy odczytać, że zmienna Z ma średnią *M* = 5 i odchylenie standardowe *SD* = 3,464. Dla ułatwienia obliczeń zaokrąglimy tę ostatnią wartość do 3,5. Dla Z = 5 stała równania regresji prostej wynosi: $b_{0(Z = 5)} = (b_2 Z + b_0) = (0{,}669 \cdot 5{,}000 + 9{,}224) = 12{,}569$, natomiast współczynnik nachylenia linii regresji: $b_{1(Z = 5)} = (b_1 + B_3 Z) = (0{,}884 + 0{,}120 \cdot 5{,}000) = 1{,}484$. Dla Z = (5 – 3,5) = 1,5 współczynniki te wynoszą odpowiednio: $b_{0(Z=1,5)} = 10{,}228$ i $b_{1(Z = 1.5)} = 1{,}064$, natomiast dla Z = (5 + 3,5) = 8,5 równają się one: $b_{0(Z = 8,5)} = 14{,}911$ i $b_{1(Z = 8)} = 1{,}904$. Linie regresji Y względem X dla trzech wybranych wyżej wartości Z zostały pokazane na Rysunku 5[10,11].

Jak widać w wypadku tych danych, im wyższa wartość Z, tym większy współczynnik kierunkowy ($b_1$) regresji prostej Y względem X, czyli – bardziej stroma linia regresji. Bardziej stroma linia regresji oznacza zaś silniejszą zależność między Y i X. Interpretując ten wynik w kategoriach psychologicznych, moglibyśmy więc powiedzieć, że im wyższy poziom motywacji, tym silniejszy (pozytywny) wpływ inteligencji na poziom wykonywania zadań arytmetycznych (Czytelnik oczywiście pamięta, że analizowane tu dane są zupełnie fikcyjne).

W związku z szacowaniem współczynników kierunkowych regresji prostej Y względem X dla różnych wartości Z pojawiają się dwa ważne pytania: (1) czy różnice między współczynnikami kierunkowymi równania regresji




*Rysunek 5.*
Linie regresji prostej Y względem X dla trzech wartości Z: Z = 8,5, Z = 5 i Z = 1,5. Oś X rozciągnięto do wartości –8, aby pokazać skrzyżowanie linii regresji. Rysunek wykonano za pomocą programu graficznego pakietu statystycznego STATISTICA, wersja 8.

prostej dla dwóch różnych wartości Z są istotne statystycznie oraz (2) czy każdy z tych współczynników jest istotny statystycznie. Są to dwa różne zagadnienia. Możemy sobie np. wyobrazić taką sytuację, że dwa współczynniki kierunkowe różnią się istotnie od siebie i każdy z nich jest istotny lub też że tylko jeden z nich jest istotny.

Jak piszą Cohen, Cohen, West i Aiken (2003, s. 280), nie dysponujemy żadnym testem istotności dla różnicy między współczynnikami nachylenia linii regresji prostej, wyznaczonymi dla dwóch dyskretnych punktów zmiennej ciągłej. Istotność współczynnika $b_3$ należy więc interpretować jako wynik testu hipotezy zerowej, mówiącej, że wszystkie współczynniki nachylenia linii regresji prostej są równe (lub inaczej: współczynniki nachylenia linii regresji prostej względem danej zmiennej ciągłej, wyznaczone dla wszystkich wartości drugiej zmiennej ciągłej, są równe). Możemy oszacować prawdziwość takiej hipotezy (tj. oszacować istotność współczynnika regresji dla interakcji), nie potrafimy natomiast oszacować, czy dwie konkretne linie regresji prostej różnią się nachyleniem. Ponieważ w wypadku naszych danych współczynnik $b_3$ okazał się istotny (zob. Tabela 9) możemy powiedzieć, że w miarę jak rośnie wartość Z następuje istotny wzrost nachylenia linii regresji Y względem X bądź też, formułując ten wniosek w terminach psychologicznych, że ze wzrostem motywacji wzrasta w sposób istotny wpływ inteligencji na poziom wykonania zadań arytmetycznych.

Znając wartość wybranych współczynników kierunkowych regresji prostej, możemy oszacować istotność statystyczną każdego z nich za pomocą testu *t*-Studenta. Wartość takiego testu równa się współczynnikowi kierunkowemu regresji prostej podzielonemu przez jego błąd standardowy: $t = b/s_b$ (przy liczbie stopni swobody: $df = n - k - 1$, gdzie $n$ to liczba badanych osób, a $k$ to liczba predyktorów uwzględnionych w równaniu). Wartość błędu standardowego w podanym wyżej wzorze równa się z kolei:

(20) $$s_b = \sqrt{s_{11} + 2Zs_{13} + Z^2 s_{33}}$$

gdzie $s_{11}$ i $s_{33}$ są wariancjami współczynników $b_1$ i $b_3$, natomiast $s_{13}$ – ich kowariancją (Aiken i West, 1991, s. 14––19; Cohen i in., 2003, s. 272–273).

Ponieważ znalezienie wartości składowych tego wzoru może okazać się kłopotliwe, Jaccard i Turrisi (2003) proponują pomysłowy sposób na obejście tego problemu. Powiedzieliśmy już wcześniej, że współczynnik $b$ dla X, z ogólnego równania regresji uwzględniającego predyktory X, Z i XZ, jest współczynnikiem nachylenia linii regresji prostej Y względem X dla Z = 0. Program statystyczny poda zawsze wielkość tego współczynnika i jego istotność statystyczną (por. np. wyniki dotyczące Modelu 2 w Tabeli 9). Jeśli chcemy uzyskać oszacowanie współczynnika kierunkowego równania regresji prostej wyznaczonego dla innej wartości Z, wystarczy przeskalować zmienną Z w taki sposób, aby interesująca nas wartość tej zmiennej stała się równa 0. Powiedzmy, że na podstawie danych z Tabeli 8 chcielibyśmy uzyskać oszacowanie istotności współczynnika $b_1$ dla $Z_i = 5$. W tym celu wystarczy odjąć od wartości oryginalnej zmiennej Z stałą równą 5. W wyniku takiej transformacji $Z_i$ przybierze wartość zerową, a współczynnik $b$ dla X z ogólnego równania regresji będzie współczynnikiem regresji prostej Y względem X dla $Z_i = 0$, czyli dla punktu na osi zmiennej Z, który przed przeskalowaniem miał wartość 5 (jest to postępowanie oparte na podobnej zasadzie, co centrowanie zmiennych, o którym będzie mowa w następnym paragrafie). Aby dokonać takiego oszacowania, musimy oczywiście, po przeskalowaniu zmiennej Z, włączyć do analizy wszystkie trzy predyktory, którymi będą teraz: X, $Z_i$ i $XZ_i$ (gdzie $XZ_i$ jest iloczynem X i $Z_i$). Równanie regresji będzie miało teraz postać:

$$Y' = b_1X + b_2Z_i + b_3XZ_i + b_0$$

Wyniki takiej analizy pokazano w Tabeli 10. Jak widać, współczynnik $b_1$, będący teraz współczynnikiem kierunkowym równania regresji prostej Y względem X, wyznaczonej dla $Z_i = 0$, jest istotny na poziomie $p = 0{,}001$. Wartość współczynnika $b_1$, uzyskana po przeskalowaniu danych, jest oczywiście taka sama, jak otrzymana wcześniej za pomocą wzoru (18), z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku (niewielka różnica to błąd zaokrąglania).

W Tabeli 11 zestawiono współczynniki $b$ dla X, oszacowane dla trzech analizowanych wcześniej wartości Z, tj. Z równego średniej wartości tej zmiennej ($Z_M = 5$), Z równego jednemu odchyleniu poniżej średniej, $Z_{M\text{-}SD} = (5 - 3{,}5) = 1{,}5$ i Z równego jednemu odchyleniu powyżej średniej, $Z_{M+SD} = (5 + 3{,}5) = 8{,}5$. Aby wyzerować każdą

*Tabela 10.*
Współczynniki równania regresji dla danych z Tabeli 8 po przeskalowaniu zmiennej Z: $Z_i = (Z - 5)$

| Źródło zmienności | *b* | *t* | *p* |
|---|---|---|---|
| Stała | 12,571 | 20,875 | 0,001 |
| X | 1,486 | 14,939 | 0,001 |
| Zi | 0,669 | 3,797 | 0,001 |
| XZi | 0,120 | 4,135 | 0,001 |

*Tabela 11.*
Istotność współczynnika *b* dla X w równaniach regresji prostej, oszacowanych dla trzech różnych wartości Z po ich przeskalowaniu (wyzerowaniu)

| Przeskalowana wartość Z | *b* | *t* | *p* |
|---|---|---|---|
| $Z_M$ (Z – 5,0)* | 1,486 | 14,939 | 0,001 |
| $Z_{M-SD}$ (Z – 1,5) | 1,064 | 7,474 | 0,001 |
| $Z_{M+SD}$ (Z – 8,5) | 1,907 | 13,393 | 0,001 |

* wyrażenie w nawiasie jest operacją zerowania wartości podanej przed nawiasem

z tych wartości, należy odjąć od zmiennej Z stałą, równą odpowiednio: 5, 1,5 i 8,5. Jak widać z tabeli, współczynniki nachylenia linii regresji Y względem X są istotne dla wszystkich wybranych przez nas wartości Z.

Podobnie jak w przypadku interakcji zmiennej kategorialnej i ciągłej, interakcję zmiennych ciągłych możemy podzielić na krzyżową (*crossover*) i niekrzyżową (*non-crossover*). W przypadku interakcji krzyżowej możemy znaleźć punkt przecięcia się linii regresji prostej. Punkt na osi zmiennej X ($X_{cross}$), w którym następuje przecięcie się linii regresji prostej Y względem X, wyznaczonych dla różnych wartości Z, można obliczyć za pomocą podanego wcześniej wzoru (15):

$$X_{cross} = \frac{-b_2}{b_3}$$

gdzie $b_2$ i $b_3$ są, odpowiednio, współczynnikami kierunkowymi dla predyktorów Z i XZ z ogólnego równania regresji.

W przypadku naszych danych, linie regresji prostej Y względem X przetną się w punkcie odpowiadającemu wartości X równej: $X_{cross}$, = –0,669/0,120 = –5,575. Punkt ten dobrze widać na zaprezentowanym wcześniej Rysunku 5, na którym wykreślono trzy linie regresji prostej, wyznaczone dla wartości Z równych, odpowiednio: Z = 8,5, Z = 5 i Z = 1,5. W podobny sposób możemy wyznaczyć punkt przecięcia się linii regresji prostej Y względem Z. Punkt na osi zmiennej Z, w którym następuje przecięcie się takich linii, możemy obliczyć ze wzoru: $Z_{cross} = -b_1/b_3$.

**Zmienne scentrowane**

Powiedzieliśmy wcześniej, że stała równania regresji odpowiada wartości zmiennej zależnej przewidywanej dla zmiennej niezależnej (zmiennych niezależnych) równej 0 (jeśli predyktorami są wektory kodujące zmienne kategorialne, stała równania regresji może mieć inną interpretację, zależnie od wybranej metody kodowania (por. Sosnowski, 2004b). Taka postać równania regresji bywa czasem niewygodna, ponieważ zerowa wartość zmiennej niezależnej może być trudna do interpretacji lub nawet nie mieć żadnej sensownej interpretacji. Wyobraźmy sobie na przykład badanie, w którym zmiennymi niezależnymi są wiek metrykalny (liczba miesięcy życia) i iloraz inteligencji, a zmienną zależną wielkość zarobków miesięcznych. Stała równania regresji oznaczałaby w tym wypadku poziom zarobków przewidywany dla wieku równego zero miesięcy i ilorazu inteligencji równego zero punktów. Taki wynik nie ma oczywiście żadnego sensu empirycznego. Największe problemy, związane z zerowymi wartościami predyktorów, pojawiają się jednak w modelach z interakcją. Jak pokazaliśmy to wcześniej, współczynnik kierunkowy dla X z ogólnego równania regresji z interakcją jest współczynnikiem kierunkowym równania regresji prostej Y względem X, oszacowanego dla zerowej wartości Z. Taki współczynnik jest zwykle mało przydatny w analizie wyników, a ponadto może skłaniać do ich nieprawidłowej interpretacji.

Żeby uniknąć zasygnalizowanych wyżej problemów, Cohen i współpracownicy (2003) proponują analizować zmienne niezależne (predyktory) ciągłe w postaci scentrowanej (zmienna zależna nie wymaga centrowania). Zmienna scentrowana (*centered predictor*) to zmienna, której wartości przedstawione są w postaci odchyleń od średniej: $X_{ctr}$ = X – M (wartości scentrowanych nie należy mylić z wartościami standaryzowanymi, bo odchyleń od średniej nie dzielimy przez odchylenie standardowe). Zmienna scentrowana ma więc, z definicji, średnią arytmetyczną równą 0 (stąd procedura ta nazywana bywa też centrowaniem średniej – *mean centering*, por. Jaccard i Turrisi, 2003), natomiast jej odchylenie standardowe jest takie samo, jak dla zmiennej niescentrowanej.

Scentrowanie predyktorów ułatwia interpretację zależności między zmiennymi, zwłaszcza w modelach z interakcją, o czym będzie mowa dalej. Ponadto operacja taka zmniejsza wzajemne skorelowanie predyktorów – efekt bardzo niepożądany, zwłaszcza gdy korelacje te są skrajnie wysokie, czyli gdy mamy do czynienia ze współliniowością (*multicollinearity*). Wystąpienie współliniowości wpływa bowiem bardzo niekorzystnie na precyzję i stabilność oszacowania parametrów równania regresji (Cohen, in. 2003; Stevens, 2009; Tabachnik i Fidell, 2007). Ponadto wysokie skorelowanie predyktorów może wywoływać efekt pozornej interakcji (*spurious interaction*, por. Cohen i in., 2003). Szczególnie silny wpływ wywiera centrowanie na korelację poszczególnych zmiennych niezależnych z ich iloczynem (predyktorem kodującym interakcję). Jeśli dwie zmienne X i Z mają rozkład normalny, to po scentrowaniu, korelacja każdej z nich z iloczynem XZ będzie równa 0. Centrowanie nie likwiduje natomiast korelacji predyktorów z ich iloczynem, jeśli ta korelacja jest spowodowana skośnością rozkładu predyktorów (Cohen i in., 2003, s. 264). Opisane efekty centrowania można łatwo zaobserwować na przykładzie naszych danych. Korelacje między X i XZ oraz między Z i XZ wynoszą $r$ = 0,637, natomiast po scentrowaniu zmniejszają się obie do zera. Centrowanie predyktorów nie ma natomiast wpływu na ich korelację ze zmienną zależną, tj. korelację między X i Y oraz między Z i Y.

Jak zmieni się interpretacja równania regresji po scentrowaniu predyktorów? Jeśli zmienne niezależne są scentrowane (a więc ich średnie są równe 0), to stała dla ogólnego równania regresji będzie automatycznie równa wartości zmiennej zależnej przewidywanej dla wartości zmiennych niezależnych równych ich średnim. Wiemy jednak, że równanie regresji ma tę własność, że średniej wartości zmiennej niezależnej (zmiennych niezależnych) przyporządkowuje średnią wartość zmiennej zależnej – punkt odpowiadający tym wartościom leży zawsze na linii regresji (dla regresji prostej) lub na płaszczyźnie lub powierzchni regresji (gdy mamy więcej predyktorów). Jeśli więc zmienne niezależne są scentrowane, to stała równania regresji będzie zawsze równa średniej zmiennej zależnej.

Jak powiedzieliśmy wcześniej, w modelu z interakcją współczynnik kierunkowy dla X z ogólnego równania regresji jest współczynnikiem regresji prostej Y względem X dla zerowej wartości Z. Jeśli jednak scentrujemy predyktory (ich średnie staną się równe 0), to współczynnik ten stanie się miarą nachylenia linii regresji Y względem X, wyznaczonej dla średniej wartości Z. Współczynnikowi takiemu można nadać też dalej idącą interpretację – możemy go interpretować jako miarę średniego nachylenia linii regresji Y względem X, to jest nachylenia tej linii uśrednionego po wszystkich wartościach Z. Współczynnik kierunkowy dla X staje się wówczas miarą efektu głównego tej zmiennej lub – nazywając rzecz inaczej – miarą średniej zależności między Y i X. Nie trzeba dodawać, że współczynnik taki może być niezwykle przydatny do interpretacji wyników analizy regresji. Równanie regresji prostej wyznaczone dla innej wartości Z (nazwijmy ją $Z_i$), otrzymane po odpowiednim przeskalowaniu Z, może z kolei dostarczyć informacji o zależności zachodzącej między X i Y, gdy Z przybiera wartość $Z_i$ (analizy takie pokazane zostały we wcześniejszej części artykułu). Oczywiście może się zdarzyć, że zerowa wartość jakiejś zmiennej niezależnej, w jej oryginalnej postaci, ma sens empiryczny, a wyznaczone dla tej wartości równanie regresji prostej względem innej zmiennej ma interpretację interesującą z merytorycznego punktu widzenia. Możemy wówczas takiej zmiennej nie centrować. Pomijając takie przypadki, zaleca się jednak centrować wszystkie zmienne niezależne ciągłe w modelach z interakcją dla łatwiejszej interpretacji wyników (Cohen i in., 2003, s. 266–267). Oczywiście, opisane tu problemy z interpretacją równań regresji prostej pojawiają się tylko wtedy, gdy zachodzi interakcja między zmiennymi niezależnymi. Jeśli interakcji nie ma, nachylenie linii regresji Y względem X jest takie samo dla wszystkich wartości Z, a nachylenie linii regresji Y względem Z jest takie samo da wszystkich wartości X i nie ma potrzeby szacowania równań regresji prostej.

Jak zmienią się wartości współczynników równania regresji po scentrowaniu zmiennych niezależnych? Jeśli nie ma interakcji między oryginalnymi zmiennymi niezależnymi, współczynniki kierunkowe pozostaną niezmienione, zmieni się tylko stała równania regresji ($b_0$). Będzie ona teraz równa wartości zmiennej zależnej przewidywanej dla średniej (a nie dla zerowej) wartości oryginalnych zmiennych niezależnych. Nie zmieni się też współczynnik korelacji wielokrotnej $R$. Jest to zrozumiałe, bo scentrowanie zmiennych jest równoważne z dodaniem do każdej z nich stałej. Taka transformacja danych nie zmienia zależności między zmiennymi, powoduje jedynie przesunięcie początku układu współrzędnych (przesunięcie punktu zerowego). Wartość $b_0$ dla danych scentrowanych można dość łatwo wyliczyć z danych niescentrowanych (por. Cohen i in., 2003, s. 263). Dla oszczędności miejsca pominę jednak te wzory.

Jeśli wystąpi interakcja, zmianie (w stosunku do modelu bez interakcji) ulegną nie tylko stała równania regresji, lecz również współczynniki kierunkowe[12]. Jest to zrozumiałe, gdyż współczynnik $b$ dla X w modelu z interakcją jest współczynnikiem kierunkowym równania regresji prostej Y względem X dla Z = 0, a scentrowanie zmiennych niezależnych oznacza przesunięcie punktu zerowego na osi zmiennej Z. Z tych samych powodów zmieni się również współczynnik kierunkowy dla Z. Scentrowanie zmiennych niezależnych nie powoduje natomiast zmiany współczynnika $b$ dla interakcji ($b_3$). Nie zmieni się też wielkość współczynnika korelacji wielokrotnej ($R$) ani kształt powierzchni regresji.

**Analiza danych scentrowanych**

Przeanalizujmy jeszcze raz dane z Tabeli 8, wykorzystując tym razem zmienne niezależne w postaci scentrowanej, oznaczone symbolami Xc, Zc i XcZc. Ponieważ zmienna X i zmienna Z mają średnie równe 5, obliczenie ich wartości scentrowanych jest bardzo proste: Xc = X – 5, Zc = Z – 5, XcZc = Xc · Zc (zauważmy, że XcZc jest

*Tabela 12.*
Współczynniki równania regresji dla zmiennych scentrowanych (analiza danych z Tabeli 8)

| Źródło zmienności | *b* | *t* | *p* |
|---|---|---|---|
| Model 1 | | | |
| Stała | 20, 000 | 48,267 | 0,001 |
| Xc | 1,486 | 12,247 | 0,001 |
| Zc | 1,271 | 10,481 | 0,001 |
| Model 2 | | | |
| Stała | 20,000 | 58,887 | 0,001 |
| Xc | 1,486 | 14,939 | 0,001 |
| Zc | 1,271 | 12,784 | 0,001 |
| XcZc | 0,120 | 4,135 | 0,001 |

iloczynem zmiennych scentrowanych, a nie scentrowaną wartością iloczynu XZ). Wyniki analizy regresji danych scentrowanych dla modelu bez interakcji (Model 1) i dla modelu z interakcją (Model 2) przedstawione są w Tabeli 12.

Analiza wyników z Tabeli 12 wykazuje, że wartość współczynnika $b_3$ dla danych scentrowanych (Model 2) jest taka sama, jak dla danych niescentrowanych (Tabela 9, Model 2). Zmieniła się natomiast stała równania regresji, która jest teraz równa średniej zmiennej zależnej: $b_0 = M_Y = 20$. Zmianie uległy również współczynniki kierunkowe dla obu predyktorów. W modelu z interakcją są one (zarówno dla danych niescentrowanych, jak i scentrowanych) współczynnikami kierunkowymi równania regresji prostej zmiennej zależnej względem wybranego predyktora, oszacowanego dla zerowej wartości drugiego predyktora. Po scentrowaniu jednak zerowa wartość predyktora równa się jego wartości średniej. Wskutek tego współczynniki kierunkowe stają się miarą średniego nachylenia linii regresji Y względem X (tj. uśrednionego po wszystkich wartościach Z) i średniego nachylenia linii regresji Y względem Z (uśrednionego po wszystkich wartościach X), a więc miarą efektów głównych tych zmiennych. W wypadku naszych danych, współczynnik $b_1 = 1{,}486$ oznacza średnie nachylenie linii regresji poziomu wykonania zadań arytmetycznych względem poziomu inteligencji, a współczynnik $b_2 = 1{,}271$ – średnie nachylenie linii regresji poziomu wykonania zadań arytmetycznych względem poziomu motywacji. Ponieważ oba współczynniki są istotne statystycznie, możemy wnioskować, że opisane wyżej zależności zachodzą w badanej przez nas populacji.

Ponieważ współczynniki $b_1$ i $b_2$ w modelu z interakcją są miarą efektów głównych obu predyktorów, nie powinno dziwić, że są one równe współczynnikom $b_1$ i $b_2$ w modelu bez interakcji (por. Tabela 12, Model 1 i 2). Równość taka nie zawsze musi jednak zachodzić. Jak piszą Aiken i West (1991, s. 27), podobieństwa współczynników $b_1$ i $b_2$ w modelu z interakcją do tych samych współczynników w modelu bez interakcji można oczekiwać dla danych scentrowanych wtedy, gdy obie zmienne mają w przybliżeniu dwuwymiarowy rozkład normalny.

Może się okazać, że badacza interesuje nie tylko równanie regresji prostej Y względem X wyznaczone dla średniej wartości Z, ale również podobne równania wyznaczone dla innych wartości Z. Współczynniki takich równań można wyliczyć, posługując się podanymi wcześniej wzorami (18) lub (19), analogicznie jak w wypadku danych niescentrowanych. Możemy je też oszacować, stosując opisaną wcześniej metodę przeskalowania (wyzerowania) interesującej nas wartości Z. Druga metoda ma tę dodatkową zaletę, że uzyskujemy przy okazji oszacowanie istotności współczynników regresji prostej. Interpretację równań regresji prostej oraz metody rysowania linii regresji prostej przedstawiłem we wcześniejszej części artykułu, nie będę więc powtórnie omawiał tych zagadnień.

**Podsumowanie**

Jeśli między ciągłymi zmiennymi niezależnymi X i Z (zakładając, że mamy w modelu tylko dwie zmienne niezależne) nie zachodzi interakcja, wzór na oszacowanie wartości oczekiwanej zmiennej zależnej Y ma postać: $Y' = b_1X + b_2Z + b_0$. Współczynnik $b_1$ wyznacza kąt nachylenia linii regresji Y względem X, jednakowy dla wszystkich wartości Z, a współczynnik $b_2$ – kąt nachylenia linii regresji Y względem Z, jednakowy dla wszystkich wartości X. Współczynnik $b_1$ jest więc miarą efektu głównego zmiennej X, a współczynnik $b_2$ – miarą efektu głównego zmiennej Z. Jeśli między X i Z zachodzi interakcja, równanie regresji przybiera postać: $Y' = b_1X + b_2Z + b_3XZ + b_0$. Zmienia się też zasadniczo interpretacja obu współczynników kierunkowych. Współczynnik $b_1$ wyznacza teraz kąt nachylenia linii regresji prostej Y względem X dla Z = 0, a współczynnik $b_2$ – kąt nachylenia linii regresji prostej Y względem Z dla X = 0. Każdy z tych współczynników można więc interpretować jako miarę efektu prostego danego predyktora, zachodzącego dla zerowej wartości drugiego predyktora. Współczynnik kierunkowy dla interakcji ($b_3$) stanowi z kolei miarę zróżnicowania kątów nachylenia linii regresji prostej. Zmienne niezależne można scentrować, tj. odjąć od każdej z nich jej średnią. Zabieg taki bardzo ułatwia interpretację zależności między zmiennymi. Po scentrowaniu predyktorów, współczynnik $b_1$ z ogólnego równania regresji wyznacza nachylenia linii regresji Y względem X dla średniej wartości Z, a więc średnie nachylenie linii regresji Y względem X w badanej populacji. Podobnie $b_2$ wyznacza nachylenie linii regresji Y względem Z dla średniej wartości X, czyli średnie nachylenie linii regresji Y względem Z.

## LITERATURA CYTOWANA


Aiken, L. S., West, S. G. (1991). *Multiple regression: Testing and interpreting interactions*. Newbury Park, CA: Sage.

Brzeziński, J. (1996). *Metodologia badań psychologicznych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Brzeziński, J., Gaul, M., Hornowska, E., Jaworowska, A., Machowski, A., Zakrzewska, M. (2004). *Skala inteligencji D. Wechslera dla Dorosłych, wersja zrewidowana – renormalizacja WAIS-R(PL)*. Warszawa: Pracownia Testów Psychologicznych PTP.

Cohen, J., Cohen, P., West, S. G., Aiken, L. S. (2003). *Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences* (wyd. 3). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ferguson, G. A., Takane, Y. (1997). *Analiza statystyczna w psychologii i pedagogice*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Howell, D. C. (2007). *Statistical methods for psychology* (wyd. 6). Belmont, CA: Thomson.

Jaccard, J., Turrisi, R. (2003). *Interaction effects in multiple regression* (wyd. 2). *Sage University papers series on quantitative applications in the social sciences, 07-072*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Johnson, P. O., Neyman, J. (1936). Tests of certain linear hypotheses and their applications to some educational problems. *Statistical Research Memoirs, 1*, 57–92.

Kirk, R. E. (1995). *Experimental design: Procedures for the behavioral sciences* (wyd. 3). Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company.

Pedhazur, E. J. (1982). *Multiple regression in behavioral research* (wyd. 2). New York: Holt, Rinehart and Winston.

Rosenthal, R., Rosnow, R. L., Rubin, D. B. (2000). *Contrasts and effect sizes in behavioral research: A correlational approach*. Cambridge: Cambridge University Press.

Searle, S. R. (2006). *Matrix algebra useful for statistics*. Hoboken, NJ: Wiley.

Sosnowski, T. (2004a). Analliza kontrastów: Między eksploracją a testowaniem hipotez. *Przegląd Psychologiczny*, *47(4)*, 367–378.

Sosnowski, T. (2004b). Zastosowanie analizy wielokrotnej regresji liniowej do analizy danych eksperymentalnych. *Psychologia-Etologia-Genetyka, 9,* 53–80.

StatSoft (2006). *Elektroniczny Podręcznik Statystyki PL;* rozdz. Ogólne model liniowe (GLM). Kraków, WEB: http://www.statsoft.pl/textbook/stathome.html.

Stevens, J. P. (2009). *Applied multivariate statistics for the social sciences* (wyd. 5). New York: Routledge.

Tabachnik, B. G., Fidell, L. S. (2007). *Using multivariate statistics* (wyd. 5). Boston: Pearson Education, Inc.

Winer, B. J., Brown, D. R., Michels, K. M. (1991). *Statistical principles in experimental design* (wyd. 3). Boston, MA: McGraw Hill.

Wrześniewski, K., Sosnowski, T., Jaworowska, A., Fecenec, D. (2006). *Inwentarz stanu i cechy lęku: Polska adaptacja STAI (podręcznik)*. Warszawa: Pracownia Testów Psychologicznych PTP.


## PRZYPISY

1. Dla wstępnego zorientowania się, czy mamy do czynienia z interakcją, wygodnie jest połączyć średnie liniami, tak jak na Rysunku 1. Ponieważ jednak zmienne niezależne są kategorialne, lepiej jest przedstawić średnie w postaci słupków. Łączenie średnich liniami mogłoby bowiem sugerować, że istnieją jakieś pośrednie wartości zmiennej niezależnej usytuowane między wartościami uwzględnionymi na rysunku.

2. Przed rozpoczęciem takiej analizy dobrze jest wykorzystać w SPSS opcję: dane → podziel na podzbiory → przedstaw wyniki w podziale na grupy → na podstawie (tu wstawić odpowiednią zmienną). Pozwoli to na szybkie wykonanie analiz efektu prostego danego czynnika dla wszystkich poziomów drugiego czynnika (np. analiz efektu prostego czynnika Nagroda dla trzech kolejnych poziomów czynnika Zadanie).

3. Określenie „liniowa" znaczy w tym wypadku tyle, że równanie regresji jest równaniem liniowym. Przykładowo, wartość oczekiwana zmiennej zależnej jest liniową kombinacją stałej i efektów poszczególnych zmiennych niezależnych, z których każdy jest iloczynem wartości danej zmiennej i związanego z nią współczynnika regresji. W równaniu takim wszystkie jego parametry (współczynniki regresji) są w potędze pierwszej, natomiast zmienne niezależne mogą mieć różną postać, np. mogą być podnoszone do wyższych potęg lub logarytmowane. O równaniu takim mówi się, że jest liniowe ze względu na parametry (nie musi być jednak liniowe ze względu na zmienne). Analizę wielokrotnej regresji liniowej można traktować jako rozwiązywanie układu równań z wieloma niewiadomymi w celu znalezienia takich wartości tych niewiadomych (współczynników równania regresji), które zapewniają najlepsze dopasowanie modelu do danych, zgodnie z przyjętym kryterium tego dopasowania, jakim jest minimalizacja resztowej sumy kwadratów. Finalnym efektem MR jest oszacowanie wielkości współczynników regresji i ich istotności statystycznej. Istotność współczynnika regresji związanego z daną zmienną jest równoznaczna z istotnością efektu tej zmiennej. Za pomocą równań liniowych można opisywać zarówno zależności prostoliniowe, jak i krzywoliniowe. Przykładowo, równanie regresji: $Y = a + bx + e$ przedstawia zależność linową między X i Y, natomiast równanie: $Y = a + b_1 x + b_2 x^2 + e$ przedstawia zależność krzywoliniową (w kształcie litery U bądź odwróconej litery U) między tymi zmiennymi.

4. Cohen i współpracownicy (2003) nazywają kodowanie ortogonalne kodowaniem kontrastów (*contrast coding*), natomiast Brzeziński (1996) tłumaczy *effect coding* na język polski jako kodowanie quasi-eksperymentalne.

5. Zmiana $R^2$, wywołana dołączeniem danego predyktora do analizy, jest równa kwadratowi współczynnika korelacji semicząstkowej (inaczej: częściowej) tego predyktora, będącego miarą unikatowego (niedzielonego z innymi predyktorami) wpływu danego predyktora na zmienną zależną.

6. Przy kodowaniu zero-jedynkowym $b_0$ jest równe stałej równania regresji w grupie odniesienia (zakodowanej jako 0), a $b_2$ – równe różnicy między stałą w grupie zakodowanej jako 1 i stałą w grupie odniesienia. Jeśli mamy do czynienia z interakcją, $b_1$ oznacza kąt nachylenia linii regresji w grupie odniesienia, natomiast $b_3$ – różnicę między kątem nachylenia linii regresji w grupie zakodowanej jako 1 a kątem jej nachylenia w grupie odniesienia. Trzeci rodzaj kodowania – ortogonalne – jest nieprzydatne, gdy zmienna kategorialna ma tylko dwa poziomy.

7. Ponieważ grupy zostały zakodowane jako 1 i –1, średnia tych wartości równa się 0. Współczynnik $b_1$ z ogólnego równania regresji (czyli uśredniony dla obu grup), odpowiada więc nachyleniu linii regresji dla S równego 0. W konsekwencji daje to efekt porównywalny ze scentrowaniem zmiennej S.

8. Rysunek taki możemy wykonać przy użyciu programu graficznego SPSS. Należy wybrać: wykres rozrzutu/punktowy → prosty, wstawić zmienną E na oś Y, zmienną R na oś X, a znaczniki ustawić według wartości zmiennej S. W efekcie otrzymamy rysunek przedstawiający rozrzut punktów (wyników indywidualnych). Jeśli klikniemy dwukrotnie ten rysunek lewym klawiszem myszy, będziemy mogli wstawić linie najlepiej dopasowane do punktów dla całej próby oraz w podgrupach (opcją domyślną jest dopasowanie linii za pomocą regresji liniowej). Do rysowania linii regresji prostej dla grup różniących się poziomem zmiennej kategorialnej można też użyć programu dostępnego w Internecie pod adresem: http://www.stat-help.com/index.html

9. Dane te wzorowane są na danych analizowanych w pracy: Cohen i in., 2003, tab. 7.1.1, s. 258.

10. Rysunek taki można wykonać, korzystając z pakietu STATISTICA. Pakiet ten pozwala wykreślić linię regresji będącą ilustracją wzoru (równania regresji) podanego przez użytkownika (opcja: wykresy 2W → wykresy funkcji użytkownika). Pozwala też nałożyć kilka rysunków na siebie (opcja: scal z wykresem). Jeśli wykreślimy w podany wyżej sposób linie regresji prostej Y względem X dla kilku wartości Z (oczywiście musimy wcześniej obliczyć parametry tych równań) i zapiszemy otrzymane rysunki, będziemy je mogli potem nałożyć na siebie i w efekcie otrzymać rysunek prezentujący kilka linii regresji prostej.

11. Łatwiejszą opcją jest skorzystanie z programu do wykresów dostępnego w Microsoft Word (choć grafika ta nie jest najwyższej jakości). Znając współczynniki równań regresji prostej, możemy oszacować wartości oczekiwane zmiennej Y dla dwóch różnych wartości X. Znając te wartości, możemy wykonać rysunek pokazujący zależność Y od X, na którym dwie wartości oczekiwane Y połączymy linią prostą. Linia taka będzie się pokrywała z linią regresji. W podobny sposób możemy wykreślić na jednym rysunku kilka linii regresji, np. linie regresji Y względem X oszacowane dla kilku różnych wartości Z. Oczywiście, metodę tę da się zastosować tylko wtedy, gdy analizowane zależności są prostoliniowe. Do rysowania linii regresji prostej dla modelu z interakcją dwu lub trzech zmiennych ciągłych bądź modelu z interakcją zmiennej ciągłej i kategorialnej można też użyć programu dostępnego w Internecie pod adresem http://www.jeremydawson.co.uk/slopes.htm. Program ten wymaga, aby dane surowe były zapisane w Excelu.

12. Współczynniki kierunkowe dla danych scentrowanych w modelu z interakcją można obliczyć za pomocą dość prostych wzorów na podstawie współczynników kierunkowych dla danych niescentrowanych (Cohen i in., 2003, s. 265).

# Interaction among categorical and continuous variables

Tytus Sosnowski
*Faculty of Psychology, University of Warsaw*

**Abstract**

The article is devoted to the analysis of interaction between independent variables. The first part of the paper presents analysis of interaction between two categorical variables by means of analysis o variance (ANOVA) and multiple regression (MR), the second part presents analysis of interaction between a categorical and a continuous variable by MR method, the third part presents analysis of interaction between two continuous variables by MR method and analysis of centered variables. Each part is illustrated by the analysis of exemplary data sets with the use of the statistical package SPSS. For simplicity, all analyses were limited to the design with two independent variables.

*Key words:* analysis of variance, categorical variables, continuous variables, interaction, multiple regression analysis

Złożono: 14.02.2010
Złożono poprawiony tekst: 3.10.2010
Zaakceptowano do druku: 3.10.2010