Psychologia Społeczna
2010 tom 5 2–3 (14) 142–161
ISSN 1896-1800

Analiza dyskryminacyjna. Podstawowe założenia i zastosowania w badaniach społecznych

Piotr Radkiewicz
Instytut Studiów Społecznych, Uniwersytet Warszawski

Artykuł jest poświęcony analizie dyskryminacyjnej – metodzie pozwalającej badać różnice pomiędzy grupami obiektów (dwiema lub więcej) w oparciu o zbiór wybranych zmiennych niezależnych (predyktorów). Można ją efektywnie stosować w wielu dziedzinach nauki i praktyki społecznej (psychologia, socjologia, politologia, ekonomia, prawo). Otrzymana dzięki modelowi analizy dyskryminacyjnej liniowa kombinacja zmiennych niezależnych jest kryterium przyporządkowywania obserwacji do grup. Informacje, których nośnikami są zmienne niezależne (predyktory) zapisywane są w postaci syntetycznej jako wyniki funkcji dyskryminacyjnej. Analiza dyskryminacyjna może mieć dwa cele: dyskryminację (separacja) i klasyfikację (alokacja). W pierwszej sytuacji badacz stara się wyjaśnić przyczyny różnic pomiędzy grupami obiektów, wykorzystując ich charakterystyki dostępne w postaci zmiennych „dyskryminujących". W drugiej, koncentrując się na klasyfikacji, znajduje równanie matematyczne łączące grupowe charakterystyki obiektów w taki sposób, że pozwala to efektywnie przewidywać przynależność grupową obiektów, dla których nie jest ona znana. Artykuł składa się z dwóch części. W pierwszej przedstawię ogólną charakterystykę modelu analizy dyskryminacyjnej; w drugiej, dwa empiryczne przykłady jej zastosowania – dla dwóch i dla czterech grup obserwacji.

Słowa kluczowe: analiza dyskryminacyjna, zmienna grupująca, liniowa funkcja dyskryminacyjna, centroidy grupowe, klasyfikacja, obserwowana i przewidywana przynależność grupowa

Analiza dyskryminacyjna jest metodą statystyczną pozwalającą badać różnice pomiędzy grupami obiektów, w oparciu o zbiór wybranych zmiennych niezależnych (predyktorów). Autorem koncepcyjnych i matematycznych podwalin tej metody był Ronald Fisher (1936), wybitny genetyk i matematyk, znany badaczom społecznym choćby z innej metody analizy statystycznej, znacznie bardziej rozpowszechnionego modelu analizy wariancji. W naukach społecznych napotykamy wiele problemów badawczych, w rozwiązaniu których metoda ta może okazać się bardzo przydatna. Klecka (1981) podaje przykład grupy badaczy poproszonych o wnikliwą analizę danych archiwalnych dotyczących akcji terrorystycznych, w których wzięto zakładników. Kiedy mamy do czynienia z podobnym zdarzeniem, intuicyjna strategia podpowiada porównanie dwóch kategorii przypadków – takich, w których zakładnicy zostali uwolnieni, z takimi, w których odnieśli poważne obrażenia lub zostali zabici. Biorąc pod uwagę podobieństwa i różnice pomiędzy tak zdefiniowanymi kategoriami ataków terrorystycznych, osoby decydujące o przebiegu akcji ratunkowej mogą dokonywać określonych predykcji co do dalszego rozwoju wypadków. Przewidywania takie opierają się na ogół na wiedzy, doświadczeniu i rozsądku osób podejmujących decyzje. Jednak kiedy problem jest złożony, a konsekwencje podjętych decyzji bardzo poważne, konieczne jest sięgnięcie po mniej subiektywne metody przewidywania.

W opisanej sytuacji decydenci chcieliby przede wszystkim wiedzieć, jakie czynniki pozwalają uprawdopodobnić bezpieczne uwolnienie zakładników, nawet wtedy gdy żądania terrorystów nie zostaną spełnione. Okazuje się, że na hipotetyczny zbiór czynników składają się następujące predyktory: liczba terrorystów; poparcie, którym cieszą

Piotr Radkiewicz, Instytut Studiów Społecznych, Uniwersytet Warszawski, ul. Stawki 5/7, 00–183 Warszawa,
e–mail: p.radkiewicz@uw.edu.pl

się w lokalnej społeczności; ton ich retoryki; typ i ilość posiadanej przez nich broni; ich liczebność w stosunku do liczby zakładników itd. Zatem, analizując przebieg i finał innych ataków terrorystycznych, w których władze odmówiły spełnienia żądań terrorystów, badacze chcą: (1) określić zmienne pozwalające przewidzieć ostateczny los zakładników; (2) znaleźć optymalną formułę matematyczną wiążącą te zmienne ze sobą; i (3) określić trafność otrzymanego równania. Wykorzystując formułę matematyczną, którą oferuje analiza dyskryminacyjna, badacze będą w stanie przekazać decydentom kluczowe informacje i wskazówki. O ile oczywiście dostępne dane potwierdzą, że wcześniejsze przypadki bezpiecznego uwolnienia zakładników rzeczywiście różnią się pod względem wybranych kryteriów od tych przypadków, które zakończyły się obrażeniami lub śmiercią.

Analizę dyskryminacyjną można efektywnie stosować w wielu dziedzinach nauki i praktyki społecznej (Norusis, 1994). Dla psychologów może być użyteczna do selekcji pracowników lub rekrutacji studentów. Dla politologów, gdy badając zachowania wyborcze, chcą określić czynniki, które różnicują osoby uczestniczące i nieuczestniczące w wyborach bądź pozwalają przewidzieć, na którą partię czy kandydata wyborca odda swój głos. Socjologom analiza dyskryminacyjna pomoże w badaniach nad orzecznictwem sądowym w kontekście społeczno-demograficznej charakterystyki oskarżonych albo w badaniu zachowań dzieci zdeterminowanych przez role społeczne związane z płcią. Ekonomiści mogą dzięki niej oceniać ryzyko kredytowe lub wyjaśniać różnice ekonomiczne między różnymi regionami geograficznymi.

Przykłady zastosowań tej metody w wielu dziedzinach szeroko rozumianych nauk społecznych można mnożyć (Klecka, 1981). Grupa technik statystycznych określanych mianem analizy dyskryminacyjnej znajduje zastosowanie do całej gamy problemów badawczych i predykcyjnych. Tym bardziej że model matematyczny leżący u jej podstaw jest stosunkowo prosty. Jego rdzeniem jest liniowa kombinacja zmiennych niezależnych (predyktorów, zmiennych dyskryminujących), która pozwala zaklasyfikować obserwacje (osoby badane) do którejś z grup będących przedmiotem zainteresowania badacza. Funkcja liniowa powstaje na podstawie wartości zmiennych w zbiorze obserwacji, których grupowa przynależność jest znana. Zmienne poddaje się starannej selekcji opratej na kryterium maksymalizacji różnic między grupami. Im większą „moc dyskryminacyjną" posiadają, tym bardziej efektywny jest model, który tworzą.

Artykuł składa się z dwóch części. W pierwszej przedstawię ogólną charakterystykę modelu analizy dyskryminacyjnej, a w drugiej dwa empiryczne przykłady jej zastosowania – dla dwóch i dla czterech grup obserwacji.

Model statystyczny

Krótkie omówienie modelu obejmuje przybliżenie jego podstawowych celów, charakterystykę założeń statystycznych, których naruszenie może spowodować istotne zniekształcenia otrzymanych rezultatów, oraz opis równania funkcji dyskryminacyjnej.

Dyskryminacja i klasyfikacja

Analiza dyskryminacyjna jest metodą dość pojemną, łączącą kilka powiązanych ze sobą operacji (działań) statystycznych. Za Johnsonem i Wichernem (1992) można powiedzieć, że ma ona dwa główne cele:

(1) Graficzny lub algebraiczny opis różnych właściwości obiektów (obserwacji) należących do kilku rozłącznych względem siebie zbiorów. Badacz poszukuje „dyskryminatorów", których wariancja separuje te zbiory od siebie tak bardzo, jak to tylko możliwe.

(2) Sortowanie obiektów (obserwacji) do dwóch lub więcej zbiorów. Badacz szuka optymalnej reguły matematycznej, która zostanie następnie wykorzystana w celu przyporządkowania nowych obiektów do właściwego zbioru.

Według terminologii wprowadzonej przez Fishera (1936) cel pierwszy nazywa się dyskryminacją, a drugi klasyfikacją. Używając bardziej opisowych określeń, jest to, odpowiednio, separacja i alokacja. Funkcja, która separuje, może czasami służyć jako alokator, i odwrotnie – zasada alokacyjna może sugerować procedurę dyskryminacyjną. W praktyce oba cele zachodzą na siebie a rozróżnienie między separacją i klasyfikacją bywa mało wyraziste.

W pierwszej sytuacji, dokonując dyskryminacji, badacz stara się wyjaśnić przyczyny różnic pomiędzy grupami obiektów, wykorzystując ich charakterystyki dostępne w postaci zmiennych „dyskryminujących". W drugiej, koncentrując się na klasyfikacji, znajduje równanie matematyczne (lub kilka równań nazywanych „funkcjami dyskryminacyjnymi") łączące grupowe charakterystyki obiektów w taki sposób, że pozwala to efektywnie przewidywać przynależność grupową obiektów, dla których nie jest ona znana. Oczywiście bardzo często zdarza się, że badaczem kierują obydwa te cele.

Procedura dyskryminacji w naturalny sposób ma charakter raczej eksploracyjny. Jest często wykorzystywana w badaniach korelacyjnych, czyli wtedy gdy związki przyczynowe między zmiennymi nie są dobrze rozpoznane. Procedura klasyfikacji jest mniej eksploracyjna w tym sensie, że prowadzi do wskazania precyzyjnych reguł używanych do porządkowania obiektów. Reguły te nie są jednak wolne od błędów, ponieważ charakterystyki właściwe dla poszczególnych grup obiektów mogą mieć (i na ogół mają) na tyle słabą moc różnicującą, że grupy te częściowo się ze sobą pokrywają. Dlatego możliwe jest zaklasyfikowania obiektu z grupy x_1 do grupy x_2 i odwrotnie. Niemniej jednak, dobre reguły klasyfikacyjne powinny prowadzić do relatywnie małej liczby błędnych klasyfikacji.

Podstawowe założenia statystyczne

Analiza dyskryminacyjna w swojej optymalnej postaci dostarcza takich reguł klasyfikacji, które minimalizują prawdopodobieństwo błędnego przyporządkowania obiektów. Aby tak się stało, zbiór danych powinien spełniać określone założenia.

Zacznijmy od tego, że (1) wszystkie obserwacje muszą należeć do dwóch lub więcej wykluczających się wzajemnie grup, a (2) każda grupa musi składać się z przynajmniej dwóch obserwacji. Innymi słowy, grupy powinny być zdefiniowane w taki sposób, aby każda obserwacja należała do jednej i tylko jednej z nich. Zdarza się niekiedy, że badacz dysponuje zbiorem obserwacji bez określonej przynależności grupowej. Mogą one zostać zaklasyfikowane do właściwej grupy później, na podstawie równania matematycznego otrzymanego dla tych obserwacji, których przynależność grupowa jest znana.

Charakterystyki obiektów wykorzystywane do różnicowania grup, nazywane zmiennymi dyskryminującymi, (3) muszą być mierzone na skalach przedziałowych lub stosunkowych, tak aby możliwe było obliczenie wartości średnich i wariancji. W zasadzie nie ma ograniczeń co do ilości zmiennych dyskryminacyjnych, (4) dopóki liczba obserwacji jest większa od liczby zmiennych o więcej niż dwa.

Zmienne dyskryminujące powinny jednak spełniać kilka istotnych warunków. Zakłada się, że (5) żadna z nich nie może być liniową kombinacją innej zmiennej dyskryminującej. Dwie idealnie skorelowane zmienne nie mogą pojawić się jednocześnie w równaniu funkcji. Uniemożliwia to wykonanie pewnych przekształceń matematycznych, ale też ma swój intuicyjnie uchwytny sens. Zmienna będąca liniową kombinacją innych zmiennych nie niesie żadnych dodatkowych informacji, ponad to, co zawierają jej komponenty. Jest więc redundantna.

Zakładamy też, że (6) w badanej populacji macierze kowariancji we wszystkich grupach są sobie równe. Najbardziej przystępna i najczęściej stosowana postać analizy dyskryminacyjnej opiera się na modelu funkcji będącej liniową kombinacją zmiennych dyskryminujących. Założenie o równości grupowych macierzy kowariancji warunkuje wiarygodną estymację parametrów funkcji dyskryminacyjnej i efektywność klasyfikacji.

Kolejne założenie mówi, że (7) wszystkie grupy zostały pobrane z populacji mającej wielozmiennowy rozkład normalny. Jest ono spełnione, gdy każda zmienna ma rozkład normalny wokół poszczególnych wartości innych zmiennych. Pozwala to na precyzyjne estymacje statystyk testów istotności i prawdopodobieństwa przynależności do danej grupy. Kiedy założenie wielozmiennowego rozkładu normalnego zostanie naruszone, oszacowane prawdopodobieństwa nie są dokładne (choć przy zachowaniu pewnej ostrożności nadal mogą służyć do interpretacji wyników).

Wymienione założenia konstytuują model matematyczny, na którym opierają się wszystkie najczęściej stosowane odmiany analizy dyskryminacyjnej. Jeśli dane empiryczne nie spełniają założeń, otrzymane statystyki nie odzwierciedlają precyzyjnie badanej rzeczywistości. Problem ten zostanie nieco szerzej omówiony w końcowej części tekstu.

Zauważmy, że do tej pory nie było w ogóle mowy o kierunku zależności przyczynowej łączącej zbiór ilościowych zmiennych dykryminujących (mierzonych na skali przedziałowej lub stosunkowej) z nominalną zmienną grupującą (której wartości oznaczają przynależność do danej grupy). Nie bez przyczyny, ponieważ – w zależności od sytuacji – na zmienną grupującą możemy patrzeć jak na wyjaśnianą (zależną) lub jak na wyjaśniającą (niezależną). To samo dotyczy oczywiście zmiennych dyskryminujących. Jeśli przynależność grupowa zależy od wariancji zmiennych dyskryminujących, mamy do czynienia z sytuacją analogiczną jak w wielokrotnej analizie regresji (z tą różnicą, że w analizie dyskryminacyjnej zmienna zależna jest mierzona na poziomie nominalnym). Z drugiej strony, jeśli wariancja zmiennych dyskryminacyjnych zależy od przynależności grupowej, analizę dyskryminacyjną można traktować jak rozszerzenie modelu analizy wariancji.

Funkcja dyskryminacyjna

Na to, czym jest funkcja dyskryminacyjna, najlepiej spojrzeć w kategoriach interpretacji przestrzennej. Zmienne dyskryminujące tworzą wówczas zbiór osi przecinających n-wymiarową przestrzeń. Każdy badany obiekt jest punktem w tej przestrzeni, ze współrzędnymi, które odpowiadają jego wartościom dla poszczególnych zmiennych. Jeśli grupy obiektów różnią się od siebie lokalizacją na osiach tych zmiennych, możemy sobie wyobrazić każdą z nich w postaci skupiska punktów skoncentrowanych w określonej strefie n-wymiarowej przestrzeni. Na ogół kontury grup częściowo na siebie nachodzą, ale odpowiadające im „terytoria" nie są identyczne. Chcąc opisać usytuowanie grupy, możemy określić jej centroid, czyli wyobrażony punkt, którego współrzędne odpowiadają wartościom średnich grupowych poszczególnych zmiennych. Ponieważ centroidy reprezentują położenie typowe dla swojej grupy, przedmiotem szczególnego zainteresowania są różnice między nimi.

Analiza właściwości grupowych centroidów wyznaczanych przez wszystkie zmienne dyskryminujące staje się zadaniem zbyt złożonym, gdy zmiennych tych jest stosunkowo dużo. Na szczęście nie potrzebujemy aż tylu wymiarów, aby określić relatywne położenie centroidów. Potrzebujemy ich co najwyżej o jeden mniej niż liczba grup. Wynika to z zasad geometrii euklidesowej, według których w każdej przestrzeni dwa dowolne punkty wyznaczają linię prostą, trzy punkty – płaszczyznę, cztery punkty – przestrzeń trójwymiarową itd. Tak więc zgodnie z tą prawidłowością punkty definiują rzeczywistość składającą się z n – 1 wymiarów, gdzie n oznacza liczbę punktów.

Możliwość określenia relacji przestrzennych pomiędzy centroidami nie zmienia faktu, że istnieje nieskończona liczba miejsc, w których możemy ulokować osie całego systemu (osie całego systemu współrzędnych). Z wielu względów najwygodniejszym punktem zaczepienia układu współrzędnych jest tzw. wielki centroid, czyli punkt, w którym wartości liczbowe dla wszystkich osi wynoszą zero i są jednocześnie średnimi wartościami dla tych osi w całym zbiorze danych. Osie reprezentujące poszczególne zmienne mogą mieć nieskończenie wiele orientacji względem wielkiego centroidu. Jeśli umieścimy jedną z nich pod takim kątem, że umożliwi to maksymalną separację grupowych centroidów (czyli większą niż przy każdej innej wartości kąta nachylenia), otrzymamy oś absorbującą szczególnie dużą porcję informacji. Zakładając, że osi jest więcej (istnieją więcej niż dwie grupy obiektów), drugą z nich lokujemy w przestrzeni podobnie jak pierwszą, tj. w taki sposób, aby maksymalizowała różnice międzygrupowe, pod warunkiem jednak, że będzie prostopadła względem pierwszej (nie będzie z nią skorelowana). Kolejne osie są pozycjonowane w ten sam sposób, zachowując ortogonalność wobec osi już istniejących.

Postępując zgodnie z opisaną powyżej zasadą, wypełniamy kryteria derywacji kanonicznej[1] funkcji dyskryminacyjnej. Opisuje ona matematyczną transformację p-wymiarowej przestrzeni zmiennych dyskryminujących w q-wymiarową przestrzeń kanonicznych funkcji dyskryminacyjnych (gdzie q oznacza maksymalną liczbę funkcji). Każdej osi (funkcji dyskryminacyjnej) odpowiada osobne równanie matematyczne definiujące jej położenie w przestrzeni. Wartości poszczególnych funkcji obliczone dla danej obserwacji określają współrzędne jej lokalizacji w q-wymiarowej przestrzeni funkcji dyskryminacyjnych.

Wyjątkiem od powyższych reguł geometrycznych jest sytuacja, kiedy centroidy grupowe nie wyznaczają nowego wymiaru (na przykład, trzy punkty wpadające na jedną linię prostą lub cztery punkty tworzące płaszczyznę). W praktyce oznacza to, że np. jedna lub dwie funkcje efektywnie wyjaśniają różnice pomiędzy czterema grupami. W realnych sytuacjach badawczych „nadliczbowe" wymiary (funkcje) zazwyczaj nie znikają całkowicie z powodu doboru próby lub błędów pomiaru. Badacz może ocenić ich wartość na podstawie dostępnych statystyk i testów istotności statystycznej (zagadnienie to zostanie szerzej omówione w dalszej części tekstu). Jeżeli stwierdzi, że ma do czynienia z funkcją nieprzedstawiającą dla niego żadnej wartości, może ją po prostu zignorować[2].

Otrzymana w oparciu o model analizy dyskryminacyjnej liniowa kombinacja zmiennych niezależnych służy jako kryterium przyporządkowywania obserwacji do grup. Informacje, których nośnikami są zmienne niezależne (predyktory), zapisywane są w postaci syntetycznej jako wyniki funkcji dyskryminacyjnej. Równanie tej funkcji przypomina bliźniaczo analizę regresji wielokrotnej i wygląda następująco:

$$D_{km} = B_0 + B_1X_{1\ km} + B_1X_{1\ km} + \ldots\ B_pX_{p\ km}$$

gdzie:
D_{km} – wartość kanonicznej funkcji dyskryminacyjnej dla obserwacji m w grupie k (tzw. wynik dyskryminacyjny);
$X_{i\ km}$ – wartość zmiennej dyskryminującej dla obserwacji m w grupie k;
B_i – współczynnik dyskryminacyjny dla zmiennej X_i reprezentujący jej ważony efekt;
B_0 – wartość stałej.

Współczynniki dyskryminacyjne, nazywane niekiedy wagami, określają ilościowy udział poszczególnych predyktorów w funkcji. Estymuje się je w taki sposób, aby funkcja liniowa, którą wyznaczają, w maksymalnym stopniu separowała istniejące grupy obserwacji. Innymi słowy, wyniki dyskryminacyjne pojedynczych obserwacji należących do różnych grup powinny różnić się od siebie tak bardzo, jak to tylko możliwe. Podobnie jak w klasycznym modelu ANOVA, przyjmujemy, że całkowita zmienność funkcji dyskryminacyjnej jest sumą wariancji wyjaśnianej przez różnice między grupami i wariancji niewyjaśnionej (wewnątrzgrupowej). Z tej perspektywy współczynniki funkcji dyskryminacyjnej maksymalizują stosunek wariancji międzygrupowej do wariancji wewnątrzgrupowej. Każda inna liniowa kombinacja współczynników spowoduje, że stosunek ten będzie mniejszy.

Jeżeli zmienna grupująca dzieli osoby badane na więcej niż dwie grupy, pojawiają się kolejne funkcje dyskryminacyjne. Dla trzech grup powstaje druga funkcja. Jej współczynniki B maksymalizują różnice między średnimi grupowymi, pod warunkiem jednak, że nie jest ona skorelowana z pierwszą funkcją. Kiedy badamy cztery grupy, według tych samych zasad (ortogonalność względem funkcji 1 i 2) wyodrębniona zostaje dodatkowo trzecia funkcja itd. Mechanizm ten implikuje oczywistą prawidłowość – najwięcej wariancji międzygrupowej absorbuje pierwsza funkcja, a każda funkcja pojawiająca się w dalszej kolejności wiąże pewną część wariancji, której nie wyjaśniły poprzednie.

Matematyczne procedury obliczania współczynników B, szczególnie kiedy mamy więcej niż dwie grupy, są dość złożone, a ich szczegółowe omówienie wykracza poza ramy niniejszego artykułu. Osoby zainteresowane znajdą na ten temat więcej informacji w niektórych opracowaniach poświęconych wielozmiennowym metodom analizy danych (np. Cooley i Lohnes, 1971; Johnson i Wichern; 1992).

Przykłady

W tej części artykułu przedstawię dwa przykłady zastosowania analizy dyskryminacyjnej[3]. W obydwu kładę nacisk na dyskryminację, czyli wyjaśnianie i interpretację różnic między grupami osób badanych, w oparciu o zbiór relewantnych zmiennych wyjaśniających. Dla badacza z obszaru nauk społecznych jest to sytuacja o wiele bardziej typowa i naturalna, niż budowanie najbardziej nawet efektywnych modeli predykcyjnych. Klasyfikacja jest zazwyczaj obiektem szczególnego zainteresowania praktyków i ekspertów.

W pierwszym przykładzie badacz chce wyjaśniać różnice między dwiema grupami badanych. W efekcie otrzyma jedną tylko funkcję dyskryminacyjną ($k - 1 = 1$, gdzie k = 2). Jest to sytuacja stosunkowo prosta, gdyż zadanie badacza – po dokonaniu właściwego wyboru zmiennych niezależnych (dyskryminujących) – sprowadza się do zrozumienia empirycznego sensu znalezionej funkcji. W przykładzie drugim, z czterema grupami, efektem analiz będą trzy funkcje dyskryminacyjne (k – 1 = 3, gdzie k = 4), a badacz może napotkać znacznie więcej trudności i komplikacji. Po pierwsze, musi zrozumieć i opisać sens nie jednej, ale aż trzech funkcji; po drugie, zdecydować, czy wszystkie one są użyteczne z punktu widzenia podstawowego celu – zrozumienia różnic między grupami obserwacji.

Przykład 1 – dwie grupy

Dużej grupie respondentów zadano pytanie „Czy w ciągu ostatnich dwóch lat brał(a) Pan/Pani aktywny udział w działalności organizacji o charakterze społecznym lub politycznym?”. Na podstawie odpowiedzi na to pytanie (i kilka pomocniczych, pozwalających doprecyzować „aktywny udział”) wyselekcjonowano dwie równoliczne grupy osób (50 w każdej grupie), zaklasyfikowanych jako „bierne” (kod 0) i „aktywne” (kod 1).

Badacz poszukiwał czynników, od których zależy aktywność społeczno-polityczna. W języku analizy dyskryminacyjnej powiedzielibyśmy, że jego celem było wskazanie takich zmiennych dyskryminujących, które w sposób możliwie najbardziej efektywny pozwolą wyjaśnić różnice między obiema grupami i przewidzieć przynależność grupową respondentów. W tym celu, na podstawie własnych badań i literatury przedmiotu, wybrał sześć zmiennych, co do których udało mu się znaleźć najwięcej przesłanek, że będą dobrze różnicowały obie grupy badanych. Zmiennymi tymi były: ekstrawersja, poczucie własnej skuteczności, wiedza o społeczeństwie i o polityce, poglądy polityczne mierzone na skali lewicowości – prawicowości, potrzeba stymulacji i wykształcenie. Wybrawszy odpowiednie narzędzia pomiaru, umieścił je w kwestionariuszu i poprosił osoby badane o jego wypeł-

Tabela 1.
Macierz interkorelacji pomiędzy zmiennymi dyskryminującymi

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Ekstrawersja	(1)	–				
Poczucie skuteczności	(2)	0,33**				
Wiedza społeczno-polityczna	(3)	0,29**	0,45**			
Lewica – prawica	(4)	–0,02	–0,04	–0,04		
Potrzeba stymulacji	(5)	0,61**	0,29**	0,40**	–0,14	
Wykształcenie	(6)	0,14	0,25*	0,27**	0,02	0,05

* $p <= 0,05$; ** $p <= 0,01$

nienie. Z wyjątkiem wykształcenia, indeksowanego w latach nauki, wszystkie zmienne mierzone były na skalach zbudowanych z kilkunastu pozycji i posiadały zadowalającą rzetelność wewnętrzną. Korelacje między zmiennymi dyskryminującymi przedstawia Tabela 1.

Konsekwencją wyboru wymienionych predyktorów jest zbiór hipotez postulujących wyraziste różnice pomiędzy ich średnimi wartościami w grupach. Tabela 2 przedstawia statystykę λ Wilksa, która jest miarą równości średnich grupowych. Dla pojedynczych predyktorów statystyka ta wyraża iloraz wewnątrzgrupowej i całkowitej sumy kwadratów (można ją również interpretować jako $1 - \eta^2$, gdzie eta^2 oznacza odsetek wariancji zmiennej zależnej wyjaśniony przez model zmiennych niezależnych). Ze względu na specyficzną konstrukcję nie jest ona intuicyjnie czytelna. Badacz jest bowiem zainteresowany tym, aby λ była możliwie najmniejsza. Kiedy przyjmuje maksymalną wartość, wynoszącą 1, średnie grupowe są równe; jeśli natomiast jej wartości zbliżone są do 0, jest to sygnał, że w porównaniu z wariancją całkowitą, wariancja wewnątrzgrupowa jest relatywnie mała, czyli – innymi słowy – większość całkowitej wariancji zmiennej możemy przypisać różnicom pomiędzy średnimi grupowym. Wartości λ można łatwo sprowadzić do postaci statystyki F i sprawdzić poziomy istotności statystycznej różnic zaobserwowanych między grupami. Jak pokazuje ostatnia kolumna Tabeli 2, spośród zmiennych wybranych przez badacza jedynie poglądy polityczne nie różnicują osób biernych i aktywnych. Średnie grupowe pozostałych predyktorów różnią się w sposób istotny statystycznie.

Istotne statystycznie efekty poszczególnych zmiennych dyskryminujących, od największego do najmniejszego (wszystkie na poziomie $p < 0{,}001$), to: wiedza społeczno-polityczna ($F_{1;98} = 85{,}1$), poczucie skuteczności ($F_{1;98} = 45{,}5$; $p < 0{,}001$), potrzeba stymulacji ($F_{1;98} = 29{,}8$), wykształcenie ($F_{1;98} = 12{,}1$; $p < 0{,}001$) i ekstrawersja ($F_{1;98} = 11{,}3$; $p < 0{,}001$).

Przedstawione powyżej dwuzmiennowe testy istotności statystycznej identyfikują różnice międzygrupowe. Pozwala to na wstępną weryfikację hipotez badawczych i określenie siły oddziaływania predyktorów na zmienną grupującą. To jednak dopiero faza wstępnej diagnozy. Istotą analizy dyskryminacyjnej, podobnie jak innych wielozmiennowych technik statystycznych, jest przecież testowanie łącznego i jednoczesnego wpływu zmiennych niezależnych, nie zaś ich pojedynczych efektów. Tylko w ten sposób badacz może uwzględnić fakt, że są one powiązane nie tylko ze zmienną zależną, ale i między sobą. Dlatego, ponieważ pokazane w Tabeli 2 statystyki λ Wilksa przedstawiają testy dwuzmiennowe, nie możemy wyciągać ostatecznych wniosków co do znaczenia i siły oddziaływania poszczególnych predyktorów. Kluczowych informacji dostarcza analiza wielozmiennowa, pokazująca efekt zmiennej dyskryminującej po poddaniu jej statystycznej kontroli współzmienności (skorelowania) z innymi predyktorami w modelu. Taka statystyczna kontrola może nie tylko zmienić rzeczywistą hierarchię oddziaływania predyktorów, ale też spowodować, że efekty niektórych z nich staną się nieistotne statystycznie. Z kolei w omawianym przypadku nie można wykluczyć, że niezależny efekt poglądów politycznych, po oczyszczeniu z innych wpływów, okaże się istotnym statystycznie predyktorem zmiennej zależnej.

Pierwsza kolumna Tabeli 3 przedstawia niestandaryzowane kanoniczne[4] współczynniki liniowej funkcji dyskryminacyjnej estymowane dla całej próby. Są one mnożnikami zmiennych wyrażonych w ich oryginalnych jednostkach. Wielkość współczynnika mówi, o ile wzrośnie (lub zmaleje) wartość funkcji, jeśli wartość predyktora zmieni się o jednostkę. Po podstawieniu współczynników funkcja wygląda następująco:

$$D_{km} = 0{,}05 \cdot X_1 + 0{,}48 \cdot X_2 + 0{,}92 \cdot$$
$$\cdot X_3 - 0{,}12 \cdot X_4 + 0{,}47 \cdot X_5 + 0{,}17 \cdot X_6 - 7{,}59$$

Tabela 2.
Testy równości średnich

	λ Wilksa	F	df	p
Ekstrawersja	0,90	11,3	1; 98	< 0,01
Poczucie skuteczności	0,68	45,5	1; 98	< 0,001
Wiedza społeczno-polityczna	0,53	85,1	1; 98	< 0,001
Lewica – prawica	0,97	3,0	1; 98	< 0,08
Potrzeba stymulacji	0,77	29,8	1; 98	< 0,001
Wykształcenie	0,89	12,1	1; 98	< 0,01

Tabela 3.
Współczynniki dyskryminacyjne i macierz struktury

	Współczynniki funkcji dyskryminacyjnej (B)	Standaryzowane współczynniki funkcji dyskryminacyjnej (β)	Macierz struktury
Ekstrawersja	0,05	0,03	0,30
Poczucie skuteczności	0,48	0,45	0,54
Wiedza społeczno-polityczna	0,92	0,65	0,74
Lewica – prawica	–0,12	–0,23	–0,18
Potrzeba stymulacji	0,47	0,37	0,44
Wykształcenie	0,17	0,27	0,28
(stała)	–7,59		

Mając równanie kanonicznej funkcji dyskryminacyjnej, badacz może przystąpić do interpretacji jej znaczenia. Interesują go przede wszystkim dwie kwestie. Określenie względnej pozycji obserwacji i centroidów grupowych oraz poznanie relacji łączących zmienne dyskryminujące z funkcją.

Wartości współczynników określają wagi poszczególnych zmiennych niezależnych w równaniu funkcji dyskryminacyjnej. W oparciu o współczynniki można oszacować tzw. wyniki dyskryminacyjne, czyli wartości funkcji dla każdej osoby badanej. Posłużmy się przykładem. W Tabeli 4 umieszczono surowe wyniki pierwszych pięciu osób w zbiorze danych. Ich wyniki dyskryminacyjne D otrzymamy mnożąc niestandaryzowane współczynniki przez wartości zmiennych, następnie sumując uzyskane iloczyny i na koniec dodając wartość stałej. Przykładowo, dla osoby pierwszej D wynosi:

$$D_1 = 0{,}05 \cdot (3) + 0{,}48 \cdot (3) + 0{,}92 \cdot (4) - 0{,}12 \cdot \cdot (3) + 0{,}47 \cdot (3) + 0{,}17 \cdot (16) - 7{,}59 = 1{,}09$$

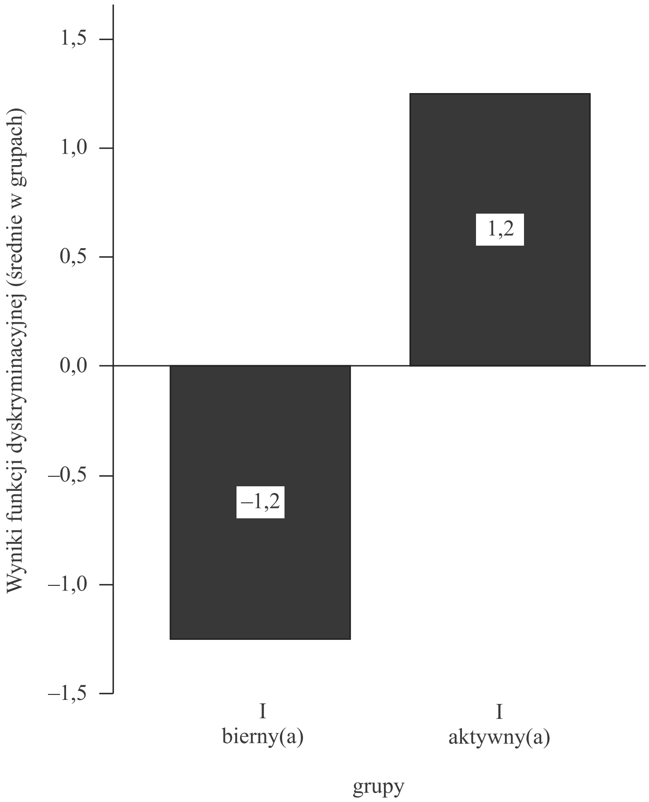
Chcąc lepiej zrozumieć, czym są wyniki dyskryminacyjne, warto zastanowić się nad ich przestrzenną interpretacją. Powstają one w efekcie przesunięcia osi funkcji dyskryminacyjnych (ortogonalnych względem siebie) do takiego położenia, w którym początek układu współrzędnych (punkt, w którym osie wszystkie funkcji przyjmują wartość 0) pokrywa się „z wielkim centroidem". Tak nazywa się swego rodzaju centrum przestrzeni – miejsce, w którym wszystkie zmienne dyskryminacyjne osiągają wartości średnie (dla całej próby).

Wspomniane przesunięcie daje dwie istotne korzyści. Po pierwsze powoduje, że patrząc na grupowy centroid lub wynik konkretnej osoby, można od razu określić ich pozycje względem centralnej części systemu. Po drugie,

Tabela 4.
Podsumowanie wyników pierwszych pięciu osób w zbiorze danych

Lp.	Ekstrawersja	Potrzeba skuteczności	Wiedza społeczno-polityczna	Lewica – prawica	Potrzeba stymulacji	Wykształcenie	GRUPY	PG	WD	P_gr.0	P_gr.1
1.	3	3	4	3	3	16	1	1	1,09	0,06	0,94
2.	4	2	3	6	3	11	0	0	–1,48	0,98	0,02
3.	4	2	3	4	4	12	1	0	–0,59	0,81	0,19
4.	3	3	3	6	4	14	0	0	–0,07	0,54	0,46
5.	5	5	3	5	3	13	1	1	0,46	0,24	0,76

PG – przewidywana grupa
WD – wynik funkcji dyskryminacyjnej
P_gr.0 – prawdopodobieństwa przynależności do grupy 0
P_gr.1 – prawdopodobieństwa przynależności do grupy 1



Rysunek 1.
Średnie funkcji dyskryminacyjnej w centroidach.

ponieważ osie są pozycjonowane w taki właśnie sposób, wynik dyskryminacyjny danej obserwacji (lub wyniki, gdy funkcji jest kilka) jest równy liczbie odchyleń standardowych dzielących ją od wielkiego centroidu. Patrząc na wynik konkretnej osoby badanej, możemy natychmiast określić jej względną odległość od początku układu współrzędnych i ocenić, czy na tle innych osób jest ona duża, czy mała. Zatem wynik pierwszej osoby z Tabeli 4, wynoszący 1,09, wskazuje, że znajduje się ona nieco ponad jedno odchylenie standardowe powyżej centroidu; z kolei, wynik drugiej osoby, wynoszący –1,48, lokuje ją półtora odchylenia standardowego poniżej centroidu. Ponadto bez najmniejszego problemu możemy określić położenie obu osób względem ich centroidów grupowych. Przedstawia je Rysunek 1 w postaci średnich wartości funkcji dyskryminacyjnej w grupach. Patrząc na te średnie i na dystans, jaki dzieli je od obu wyników, można powiedzieć, że zarówno osoba pierwsza (z grupy aktywnych), jak i druga (z grupy biernych), są typowymi przedstawicielami swoich grup.

Wracając do naszej funkcji dyskryminacyjnej, niewątpliwie tym, co szczególnie interesuje badacza, jest interpretacja wielkości efektów poszczególnych predyktorów i określenie hierarchii ich wpływu. Moglibyśmy oczekiwać, że zmienne, którym odpowiadają duże wartości B, będą miały największy wkład w wyniki funkcji dyskryminacyjnej. Niestety, wartości współczynników niestandaryzowanych nie są dobrym wskaźnikiem siły efektu. Podobnie jak w analizie regresji wielokrotnej, pokazują bezwzględny udział predyktora w funkcji (znak nie ma tu znaczenia, ujemny efekt poglądów politycznych mógłby być dodatni, gdybyśmy odwrócili znaki pozostałych współczynników), ale mogą być mylące, jeśli zmienne niezależne mierzone są w różnych jednostkach (np. waga w kilogramach, a wzrost w centymetrach). Aby poznać rzeczywistą siłę efektów poszczególnych predyktorów i wskazać, który z nich wnosi najwięcej do funkcji dyskryminacyjnej, konieczne są współczynniki standaryzowane. W sensie matematycznym określają one wagi poszczególnych zmiennych po poddaniu ich rozkładu standaryzacji (średnia 0, odchylenie standardowe 1). Im większy współczynnik, tym większy udział danej zmiennej w funkcji – przy założeniu, że efekty wszystkich innych zmiennych pozostają stałe (podlegają statystycznej kontroli współzmienności).

Współczynniki standaryzowane znajdują się w drugiej kolumnie Tabeli 3. Największy, niezależny wpływ na wyniki funkcji dyskryminacyjnej wywiera wiedza społeczno-polityczna ($\beta = 0{,}65$). Nieco mniejszy, ale nadal pokaźny wkład mają – w kolejności – poczucie skuteczności ($\beta = 0{,}45$), potrzeba stymulacji ($\beta = 0{,}37$), wykształcenie ($\beta = 0{,}27$) i poglądy ($\beta = -0{,}23$). Efekt ekstrawersji jest marginalny ($\beta = 0{,}03$).

Konkludując, można powiedzieć, że wysokie wartości funkcji dyskryminacyjnej, charakterystyczne dla aktywnych, osiągają przede wszystkim osoby z wszechstronną wiedzą na tematy społeczno-polityczne i z silnym uwewnętrznionym poczuciem kontroli. Ponadto aktywności sprzyja silna potrzeba stymulacji, wykształcenie i lewicowy światopogląd (warto przypomnieć, że ta ostatnia zmienna nie różnicowała obu grup w dwuzmiennowym teście λ Wilksa). Predyktorem wnoszącym zdecydowanie najmniejszy wkład jest ekstrawersja.

Chcąc określić związki łączące zmienne dyskryminacyjne z funkcją, możemy też spojrzeć na macierz struktury. Pokazują one wielkość związku między predyktorem i funkcją. Jeśli absolutna wielkość współczynnika jest bardzo duża (w okolicach +1,0 albo –1,0), funkcja zawiera niemal tę samą informację co zmienna. Kiedy jest bliska zera, obie nie mają ze sobą nic wspólnego.

Macierz struktury znajduje się w ostatniej kolumnie Tabeli 3. Wynika z niej mniej więcej to samo, co wiemy już z kolumny przedstawiającej standaryzowane współczynniki dyskryminacyjne. Dominuje silna dodatnia korelacja z wiedzą społeczno-polityczną (r = 0,74) oraz, w nieco mniejszym stopniu, dodatnie korelacje z poczuciem skuteczności (r = 0,54) i potrzebą stymulacji (r = 0,44). Między obiema kolumnami współczynników pojawia się jednak przynajmniej jedna istotna rozbieżność. Dotyczy ona roli ekstrawersji. Standaryzowany współczynnik dla tej zmiennej wynosi 0,03, co wskazuje jej marginalne znaczenie. Tymczasem współczynnik macierzy struktury osiąga wartość 0,30, sugerując bardzo wyraźny związek z funkcją dyskryminacyjną. Dlaczego tak się dzieje?

Obydwa współczynniki mówią o czymś trochę innym. Współczynniki standaryzowane pokazują wkład danego predyktora w obliczanie wyniku dyskryminacyjnego. Jest to jeden z możliwych sposobów patrzenia na znaczenie zmiennej, mający jednak poważne ograniczenia. Jeśli obie zmienne mają niemal identyczny zasób informacji dyskryminujących (tj. są bardzo silnie skorelowane), muszą w jakiś sposób podzielić między siebie swój wkład w wynik dyskryminacyjny. W konsekwencji może się zdarzyć, że ich β-ty będą znacznie mniejsze niż wtedy, gdy tylko jedna z nich zostałaby włączona do równania. Z drugiej strony, może się zdarzyć i tak, że β-ty będą większe, ale z przeciwnymi znakami, co jest sygnałem, że prawdopodobnie obydwa efekty w pewien sposób wzajemnie się równoważą. Dzieje się tak, ponieważ współczynniki standaryzowane, określając ilościowy udział danego predyktora w funkcji, biorą jednocześnie pod uwagę udział wszystkich innych zmiennych.

Współczynniki macierzy struktury to proste, dwuzmiennowe korelacje, abstrahujące od związków z innymi zmiennymi. Zauważmy, że ekstrawersja ma bardzo mały współczynnik standaryzowany, ale relatywnie duży współczynnik struktury. Wynika to prawdopodobnie z jej bardzo silnej korelacji z potrzebą stymulacji (r = 0,61). Wygląda na to, że efekt potrzeby stymulacji absorbuje większą część wariancji wspólnej tych zmiennych ze zmienną zależną, wypychając niejako ekstrawersję z równania funkcji dyskryminacyjnej.

Takie kłopotliwe zawirowania pomiędzy predyktorami pojawiają się w analizie dyskryminacyjnej na tyle często, że współczynniki struktury rekomendowane są jako lepsze narzędzie do interpretacji kanonicznej funkcji dyskryminacyjnej niż współczynniki standaryzowane.

Kiedy badacz zinterpretuje związki łączące predyktory z funkcją, pozostaje mu jeszcze ocenić jej dopasowanie, czyli sprawdzić, na ile efektywnie wyjaśnia ona różnice między grupami. Pierwsza część Tabeli 5 przedstawia analizę wariancji, w której zmienną zależną są wyniki dyskryminacyjne, a zmienną niezależną przynależność grupowa. Wartość współczynnika dopasowania modelu, η^2, wynosi 0,61, wskazując, że przynależność do grup wyjaśnia ponad 60% wariancji wyników dyskryminacyjnych. Funkcja, która dobrze „dyskryminuje", powinna maksymalizować wariancję międzygrupową, redukując wariancję wewnątrzgrupową. A zatem ta, którą otrzymał badacz, niewątpliwie się do takich zalicza.

Inną statystyką umieszczoną w Tabeli 5 jest tzw. wartość własna funkcji dyskryminacyjnej, przedstawiająca stosunek wariancji międzygrupowej do wariancji wewnątrzgrupowej. Największe wartości własne charakteryzują funkcje o dużej mocy dyskryminacyjnej. Gdy mamy do czynienia z dwiema grupami, pojawiające się obok wartości procentowe wynoszą zawsze 100. Nabierają one

Tabela 5.
Analiza wariancji i statystyki funkcji dyskryminacyjnej

ANOVA wyniki funkcji dyskryminacyjnej					
	Suma kwadratów	df	Średni kwadrat	F	p
Między grupami	155,92	1	155,93	152,86	< 0,001
Wewnątrz grup	100	98	1,02		
Ogółem	251,92	99		$\eta^2 = 0{,}61$	

Wartości własne				
Funkcja	Wartość własna	% wariancji	% skumulowany	Korelacja kanoniczna
1	1,56	100	100	0,78

λ Wilksa				
Test funkcji	λ Wilksa	Chi^2	df	p
1	0,39	90,44	6	< 0,001

sensu, gdy analiza dyskryminacyjna wyodrębnia przynajmniej dwie funkcje, dlatego wrócę do omówienia tej statystyki w dalszej części tekstu.

Kolejną statystyką w Tabeli 5 jest korelacja kanoniczna, będąca miarą wielkości związku pomiędzy wynikami dyskryminacyjnymi i zmienną grupującą. Ma identyczne znaczenie jak współczynnik η w analizie wariancji. Jak wiadomo, η jest ilorazem międzygrupowej i całkowitej sumy kwadratów zmiennej zależnej (w tym wypadku jest nią funkcja dyskryminacyjna). Reprezentuje więc tę część wariancji, którą wyjaśniają różnice międzygrupowe.

Wartości korelacji kanonicznej mieszczą się w przedziale od 0 (brak związku) do 1 (związek maksymalny). W omawianym przykładzie współczynnik 0,78 wskazuje, że badaczowi udało się znaleźć funkcję bardzo silnie powiązaną ze zmienną grupującą. Kwadrat korelacji kanonicznej (tożsamy z η^2), wynoszący 0,61, oznacza, że różnice międzygrupowe wyjaśniają ponad 60% wariancji funkcji.

Ostatnia statystyka w Tabeli 5 to λ Wilksa. W przypadku dwóch grup wyraża ona stosunek wewnątrzgrupowej i całkowitej sumy kwadratów funkcji dyskryminacyjnej. Jest to, inaczej mówiąc, proporcja całkowitej wariancji wyników, której nie wyjaśniają różnice pomiędzy grupami. Ponieważ λ osiąga maksymalną wartość 1, kiedy średnie wyniki dyskryminacyjne w grupach są sobie równe, funkcje mające dużą wariancję międzygrupową i małą wewnątrzgrupową powinny wykazywać wartości zbliżone do 0.

W omawianym przypadku λ wynosi 0,39. Towarzyszy jej test hipotezy zerowej postulującej brak różnic międzygrupowych w populacji, z której pobrano próbę. Statystyka λ jest przekształcana w zmienną o rozkładzie bardzo zbliżonym do rozkładu statystyki χ^2. Wartości 0,39 odpowiada $\chi^2 = 90,4$ z poziomem istotności statystycznej poniżej wartości krytycznej 0,001. Tak więc wydaje się zupełnie nieprawdopodobne, aby u osób biernych średnia funkcji dyskryminacyjnej była taka sama, jak u osób aktywnych.

Drugim podstawowym narzędziem oceny efektywności modelu jest analiza wyników klasyfikacji. Istnieje kilka technik wykorzystujących nieco inne reguły klasyfikacji. Wszystkie one bazują na informacjach, których nośnikiem są wyniki dyskryminacyjne. Najpopularniejsza, wykorzystywana również przez program statystyczny SPSS, oparta jest na tzw. regule Bayesa. Zgodnie z nią, prawdopodobieństwo, że wynik dyskryminacyjny D należy do określonej grupy obserwacji, jest estymowane na podstawie wzoru:

$$P(G_i/D) = \frac{P(D/G_i)\ P(G_i)}{\sum_{i=1}^{g} P(D/G_i)\ P(G_i)}$$

Indeks $P(G_i)$ oznacza aprioryczne (bezwarunkowe) prawdopodobieństwa, że obserwacja należy do danej grupy, wówczas kiedy nie mamy o niej żadnych innych informacji. $P(G_i)$ można estymować na kilka sposobów. Jeśli próba jest reprezentatywna dla populacji, za estymatory prawdopodobieństwa *a priori* mogą służyć obserwowane proporcje przypadków w grupach. Kiedy indziej strukturę próby można oprzeć na ustalonych wcześniej liczebnościach grupowych. W omawianym przykładzie liczebności te są równe (50 osób w grupie), co oznacza, że przyjęte prawdopodobieństwo *a priori* dla każdej grupy wynosi $P(G_i) = 0,5$ i zdecydowanie przeszacowuje proporcję osób aktywnych w całym społeczeństwie. Liczne badania prowadzone na próbach reprezentatywnych wskazują bowiem, że rzeczywisty odsetek osób aktywnych wynosi 25%. Badacz może wziąć tę informację pod uwagę, ustalając $P(G_i)$ dla grupy osób biernych na poziomie 0,75, a dla aktywnych na poziomie 0,25. Z dwóch powodów nie musi jednak – jak w tym przykładzie – tego robić. Po pierwsze, wiedza na temat rzeczywistego rozkładu osób biernych i aktywnych w całej populacji nie jest jednoznaczna – znane mu badania różniły się, często dość znacząco, definicją wymiaru bierność–aktywność i przyjętymi metodami jego pomiaru. W efekcie wie jedynie, że wartość 0,25 jest bardziej wiarygodną aproksymacją rzeczywistego odsetka osób aktywnych niż, oszacowana na podstawie liczebności w badanej próbie, wartość 0,5. Nie wie jednak, na ile odbiega ona od stanu faktycznego. Po drugie, troska o precyzyjne zdefiniowanie $P(G_i)$ jest funkcją potencjalnych kosztów związanych z dokonaniem błędnej klasyfikacji. Przypuśćmy, odwołując się do wspomnianego już przykładu Klecki, że celem analizy dyskryminacyjnej jest opracowanie modelu predykcyjnego, który ma trafnie przewidywać zachowania terrorystów wobec zakładników uwięzionych w trakcie akcji terrorystycznych. Jeśli od wskazań takiego modelu zależy wybór metody działania wobec terrorystów, niewłaściwe określenie poziomu $P(G_i)$, zwiększające ryzyko błędnego przewidywania rozwoju wydarzeń, może mieć następstwa dramatyczne w skutkach. Zupełnie inaczej jest w badaniu, które opisuje przykład 1. Konsekwencje błędnych przewidywań są znikome i nie mają większego praktycznego znaczenia. Tutaj celem analizy dyskryminacyjnej jest wyjaśnienie różnic między kilkoma grupami osób badanych, a ogólny odsetek trafnie zaklasyfikowanych obserwacji służy jedynie jako miara dopasowania modelu do danych empirycznych. Oznacza to, że najsensowniejszym rozwiązaniem wydaje się oszacowanie wyjściowego $P(G_i)$ na podstawie empirycznie zaobserwowanej liczebności grup (w przykładzie pierwszym wynosi ono 0,5).

Przy okazji warto też zwrócić uwagę na problem związany z kosztami popełnionych błędów. Kiedy jedna z grup jest zdecydowanie mniej liczna niż druga, ogólny wskaźnik trafnie zaklasyfikowanych obserwacji może okazać się bardzo wysoki, nawet jeśli większość przypadków należących do mniejszości zostanie przyporządkowana błędnie. Często jednak to właśnie owa mniejszość – na przykład odsetek osób chorych na grypę, które umierają wskutek powikłań – jest przedmiotem szczególnego zainteresowania. W takiej sytuacji twórcy modelu powinno bardziej zależeć na bezbłędnej identyfikacji osób należących do mniejszości niż na minimalizowaniu ogólnej liczby błędnych przyporządkowań. Kiedy dla poszczególnych grup koszty popełnienia pomyłki nie są równe, badacz może uwzględnić ten fakt przez korektę wartości $P(G_i)$.

Wróćmy teraz do reguły Bayesa. Choć prawdopodobieństwo *a priori* zawiera pewne informacji o każdej obserwacji, ignoruje całkowicie wiedzę, której dostarczają zmienne dyskryminacyjne. Aby ją wykorzystać, należy obliczyć prawdopodobieństwo pojawienia się określonych kombinacji predyktorów w zależności od grupy. Na przykład, jeśli wyniki funkcji dyskryminacyjnej mają w obu grupach rozkład normalny, możliwe jest obliczenie prawdopodobieństwa pojawienia się konkretnej wartości funkcji dyskryminacyjnej (wynik dyskryminacyjny D), przy założeniu, że obserwacja należy do grupy 1 albo do grupy 2. Wielkość taką nazywa się prawdopodobieństwem warunkowym, $P(D/G_i)$.

$P(D/G_i)$ mówi, na ile prawdopodobne jest, że dana wartość funkcji dyskryminacyjnej pojawi się w poszczególnych grupach. Tymczasem, kiedy przynależność grupowa obserwacji nie jest znana, badacz przede wszystkim chce wiedzieć, jakie jest prawdopodobieństwo, że po uwzględnieniu wszystkich dostępnych informacji obserwacja ta znajdzie się w tej albo innej grupie. Wielkość taka, nazywana prawdopodobieństwem *a posteriori*, $P(G_i/D)$, jest estymowana z reguły Bayesa na podstawie wartości $P(D/G_i)$ i $P(G_i)$. Osoba badana (obserwacja) zostaje zaklasyfikowana na podstawie jej wyniku dyskryminacyjnego do tej grupy, w której uzyskuje największe prawdopodobieństwo *a posteriori*. Ilustrują to dwie ostatnie kolumny Tabeli 4, przedstawiające $P(G_i/D)$ dla pierwszych pięciu osób badanych.

Precyzyjne informacje o wynikach klasyfikacji znajdziemy w Tabeli 6. Przedstawia ona – dla każdej grupy osobno – liczbę obserwacji, które zostały przyporządkowane poprawnie albo niepoprawnie. Przypadki zaklasyfikowane poprawnie znajdują się w klatkach tworzących przekątną tabeli. Okazuje się, że w oparciu o funkcję dyskryminacyjną spośród 50 osób biernych poprawnie udało się przyporządkować 45 (90%), a błędnie 5 (10%). Dla 50 osób aktywnych model poprawnie przewiduje przynależność grupową 47 (94%), a błędnie, wrzucając je do grupy biernych, tylko 3 (6%).

Całkowity odsetek poprawnie zaklasyfikowanych obserwacji wynosi 92% – $[(45 + 47) / 100] \times 100 = 92$. Jest to druga oprócz korelacji kanonicznej, podstawowa miara dopasowania modelu. Dopasowania, przez które rozumiemy efektywności funkcji dyskryminacyjnej. Gdy, jak w omawianym przykładzie, wartości prawdopodobieństwa *a priori* szacowane są na podstawie empirycznie zaobserwowanych liczebności grupowych, a te są równe lub bardzo zbliżone, odsetek poprawnie zaklasyfikowanych obserwacji możemy odnosić bezpośrednio do wielkości $P(G_i)$. Losowe prawdopodobieństwo poprawnego zaklasyfikowania wszystkich obserwacji jest równe 0,5, co oznacza, że na podstawie samego tylko $P(G_i)$ możemy trafnie przewidzieć przynależność grupową 50% osób badanych. Model analizy dyskryminacyjnej zwiększa odsetek poprawnie zaklasyfikowanych obserwacji do 92%. A zatem, w porównaniu z samym $P(G_i)$, efektywność przewidywania opartego na funkcji dyskryminacyjnej jest większa o 42%.

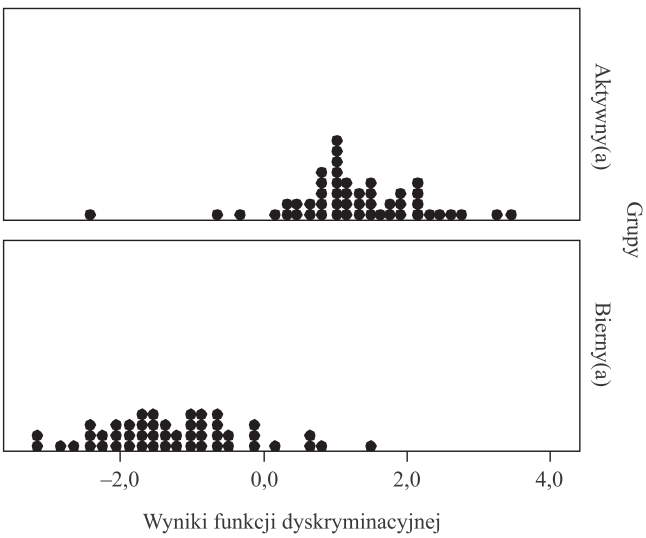
Najlepszym sposobem wizualizacji modelu jest połączenie histogramów wyników dyskryminacyjnych w obu

Tabela 6.
Wyniki klasyfikacji

Grupy			Przewidywana przynależność do grupy		Ogółem
			bierny(a)	aktywny(a)	
Oryginalne	Liczebność	bierny(a)	45	5	50
		aktywny(a)	3	47	50
	%	bierny(a)	90	10	100
		aktywny(a)	6	94	100

92% pierwotnie pogrupowanych obserwacji zostało prawidłowo sklasyfikowanych grupach. Rysunek 2 przedstawia histogramy w taki sposób, aby zobrazować, do jakiego stopnia rozkłady grupowe są rozłączne względem siebie. Każdy punkt oznacza jedną obserwację. Ogólnie rzecz biorąc, osoby aktywne mają wysokie, a osoby bierne niskie wyniki dyskryminacyjne. Jednak nie zawsze, ponieważ skrajne części obu rozkładów zachodzą na siebie. Okazuje się, że pięciu badanych z grupy biernych uzyskało wyniki dyskryminacyjne, które błędnie lokują ich wśród aktywnych; natomiast w grupie aktywnych trójka badanych została błędnie zidentyfikowana jako bierni. To właśnie te osoby składają się na ogólny odsetek 8% niepoprawnie zaklasyfikowanych obserwacji w całej próbie.

Na koniec spójrzmy jeszcze na Rysunek 2 pod kątem zawartości Tabeli 4. W podsumowaniu wyników pierwszych pięciu osób w zbiorze danych znajdziemy trzy osoby, których pierwotna przynależność grupowa została w oparciu o wartość prawdopodobieństwa *a posteriori* przewidziana w sposób niepodlegający dyskusji (osoby numer 1, 2 i 5). Stało się tak dlatego, że ich wyniki dyskryminacyjne w sposób jednoznaczny lokują je w pobliżu centroidów grupowych i z dala od granicznej wartości separującej obie grupy (dotyczy to szczególnie osób numer 1 i 2). Osoba numer 3 została błędnie zaklasyfikowana jako bierna, choć na podstawie empirycznych wskaźników znalazła się w grupie aktywnych. Najciekawszym jednak przypadkiem jest osoba numer 4. Według reguły klasyfikacyjnej tego modelu znalazła się ona w grupie biernych, tj. w tej, w której powinna się znaleźć. Jednak odpowiadające jej wielkości prawdopodobieństwa *a posteriori* wskazują, że niemal równie prawdopodobna jest



Rysunek 2.
Histogramy funkcji dyskryminacyjnej w grupach.

dla niej przynależność do grupy aktywnych (odpowiednio 0,54 i 0,46). Dlaczego? Ponieważ jej wynik dyskryminacyjny (D = –0,07) leży w najbliższym sąsiedztwie wartości granicznej. Warto zatem pamiętać, szczególnie jeśli badacz ma na celu opracowanie praktycznej metody prognozowania, że każda obserwacja ma indywidualną specyfikę. Nawet jeśli całościowy model jest znakomitym narzędziem prognostycznym, w pojedynczych przypadkach jego rezultaty mogą się niestety okazać bardzo niepewne.

Przykład 2 – cztery grupy

W drugim badaniu grupa 80 respondentów wypełniała kwestionariusz, który zawierał zestaw skal mierzących kilkanaście wymiarów postaw i przekonań psychospołecznych. Badanych poproszono także o odpowiedź na pytanie otwarte „Co w dzisiejszych czasach oznacza dla Ciebie bycie patriotą?”. Na podstawie odpowiedzi badacze dokonali kategoryzacji wszystkich respondentów na cztery, liczące po 20 osób, grupy: (1) Sentymentalni – podkreślający szacunek dla historii narodu i jego kultury, w połączeniu z koniecznością budowania państwa, które sprosta wyzwaniom XXI wieku; (2) Nowocześni – skupieni na konieczności budowania nowoczesnego państwa i społeczeństwa obywatelskiego; (3) Tradycyjni – skupieni na konieczności ochrony narodowych wartości i kultywowania tradycji; i (4) Wycofani – deklarujący brak zainteresowania i/lub przekonani, że patriotyzm jest pustosłowiem. Analiza dyskryminacyjna miała na celu znalezienie optymalnej konfiguracji predyktorów, wyjaśniających różnice dzielące opisane grupy. Badacze zbudowali model, do którego – po dokonaniu wstępnych analiz eksploracyjnych – włączyli sześć zmiennych dyskryminujących (anomia społeczna, alienacja społeczno-polityczna, paranoja polityczna, autorytaryzm, konserwatyzm i nacjonalizm). Wszystkie zmienne mierzono skalami składającymi się z kilkunastu pozycji, wykazującymi zadowalającą rzetelność. Korelacje między nimi przedstawia Tabela 7.

Tabela 8 pokazuje test równości średnich dla zmiennych dyskryminujących. Przypomnę, ponieważ λ Wilksa wyraża stosunek wewnątrzgrupowej sumy kwadratów do całkowitej sumy kwadratów, badacze chcieliby, aby jej wielkości były jak najmniejsze. Po przekształceniu λ na χ^2 okazuje się, że średnie grupowe wszystkich predyktorów wykazują istotne statystycznie różnice. W kolejności, od największego do najmniejszego, ich efekty są następujące (wszystkie efekty istotne na poziomie $p < 0{,}001$): nacjonalizm ($F_{3;76} = 46{,}16$), autorytaryzm ($F_{3;76} = 31{,}78$), anomia ($F_{3;76} = 22{,}46$), konserwatyzm ($F_{3;76} = 17{,}78$), paranoja ($F_{3;76} = 9{,}81$) i alienacja ($F_{3;76} = 6{,}76$). Łatwo też

Tabela 7.
Macierz interkorelacji pomiędzy zmiennymi dyskryminującymi

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Anomia (1)	–				
Alienacja (2)	0,60**				
Paranoja (3)	0,24*	0,29**			
Autorytaryzm (4)	0,04	0,16	0,16		
Nacjonalizm (5)	0,05	–0,15	–0,10	0,68**	
Konserwatyzm (6)	–0,04	0,04	0,24*	0,54**	0,56**

* $p <= 0{,}05$; ** $p <= 0{,}01$

zauważyć, że choć wszystkie predyktory wydają się posiadać wyraziste związki ze zmienną grupującą, to macierz interkorelacji między nimi (por. Tabela 7) sugeruje, że tworzą one dwie niezależne, jakościowo odrębne podgrupy (w pierwszej: anomia, alienacja i paranoja; w drugiej: autorytaryzm, konserwatyzm i nacjonalizm).

Ponieważ zmienna grupująca dzieli osoby badane na cztery podgrupy, analiza dyskryminacyjna wyodrębnia nie jedną (jak w poprzednim przykładzie), ale aż trzy funkcje dyskryminacyjne (k – 1 = 3; gdzie k = 4). Oznacza to, że w tym przypadku położenie każdej osoby badanej określamy na podstawie trzech wyników dyskryminacyjnych, obliczanych – analogicznie jak w poprzednim przykładzie – z niestandaryzowanych współczynników dyskryminacyjnych. Po podstawieniu współczynników z Tabeli 9 funkcje te wyglądają następująco:

$$D_{1km} = 0{,}17 \cdot X_1 + 0{,}04 \cdot X_2 + 0{,}46 \cdot \cdot X_3 - 0{,}32 \cdot X_4 + 0{,}27 \cdot X_5 + 1{,}03 \cdot X_6 - 6{,}17$$

$$D_{2km} = 1{,}06 \cdot X_1 + 0{,}02 \cdot X_2 - 0{,}33 \cdot \cdot X_3 - 0{,}04 \cdot X_4 + 0{,}71 \cdot X_5 + 0{,}06 \cdot X_6 - 4{,}96$$

$$D_{3km} = 0{,}31 \cdot X_1 + 0{,}12 \cdot X_2 + 0{,}53 \cdot \cdot X_3 + 0{,}67 \cdot X_4 - 0{,}51 \cdot X_5 - 1{,}05 \cdot X_6 - 0{,}41$$

Tabela 8.
Testy równości średnich

	λ Wilksa	F	df	p
Anomia	0,53	22,5	3; 76	< 0,001
Alienacja	0,79	6,8	3; 76	< 0,001
Autorytaryzm	0,44	31,8	3; 76	< 0,001
Konserwatyzm	0,59	17,8	3; 76	< 0,001
Paranoja	0,72	9,8	3; 76	< 0,001
Nacjonalizm	0,35	46,2	3; 76	< 0,001

Szczegółowa analiza zawartości Tabeli 9 wskazuje, że pierwsza funkcja dyskryminacyjna jest zdominowana przez pozytywny efekt nacjonalizmu (β = 0,69). Towarzyszą mu znaczące, choć wyraźnie mniejsze, efekty autorytaryzmu, konserwatyzmu i paranoi (odpowiednio β = 0,45; 0,33 i 0,25). W przypadku trzech pierwszych zmiennych – tj. nacjonalizmu, autorytaryzmu i konserwatyzmu – ich związki z pierwszą funkcją potwierdzają silne korelacje w macierzy struktury (odpowiednio r = 0,78; 0,64 i 0,48). Wartość r = 0,19 dla paranoi jest zdecydowanie mniejsza od współczynników r trzech najsilniejszych predyktorów, przez co związek tej zmiennej z funkcją wydaje się stosunkowo słaby.

W drugiej funkcji dyskryminacyjnej dominują dodatnie efekty anomii (β = 0,90) i paranoi (β = 0,63), potwierdzane przez silne korelacje w macierzy struktury (odpowiednio r = 0,75 i 0,45). Z wyjątkiem zauważalnego, negatywnego oddziaływania autorytaryzmu (β = –0,26), wielkości efektów pozostałych predyktorów wskazują na całkowity brak związku z drugą funkcją. Czy na pewno? Marginalne znaczenie konserwatyzmu i nacjonalizmu potwierdzają dodatkowo niewielkie wartości r dla obu tych predyktorów. W przypadku alienacji sytuacja przedstawia się jednak inaczej. O ile udział tej zmiennej w wyniku dyskryminacyjnym jest praktycznie żaden (β = 0,02), to związek łączący ją z funkcją jest relatywnie silny (r = 0,40). Rozbieżność ta jest prawdopodobnie efektem współliniowości, ponieważ – wracając na chwilę do Tabeli 7 – możemy zobaczyć, że alienacja koreluje bardzo silnie z anomią (r = 0,60). Współliniowość nie wpływa na wielkość współczynników struktury, znajduje jednak odzwierciedlenie w wielkości współczynników β. Anomia, jako predyktor silniej skorelowany z drugą funkcją, absorbuje efekt alienacji, wypychając ją z równania analizy dyskryminacyjnej. Nie zmienia to jednak faktu, że związek alienacji z drugą funkcją jest bardzo wyrazisty.

Zostawmy na chwilę problem interpretacji trzeciej funkcji i skupmy się na pytaniu o sens empiryczny dwóch pierwszych. Na podstawie szczegółowej analizy efektów zmiennych dyskryminujących przedstawionych w Tabeli 9, można stwierdzić, że pierwsza funkcja przyjmuje dodatnie wartości, gdy osoba badana charakteryzuje się wysokim poziomem nacjonalizmu, autorytaryzmu i konserwatyzmu. Natomiast dodatnie wartości drugiej funkcji powiązane są przede wszystkim z wysokim poziomem anomii społecznej, alienacji i paranoi. Wiedza, którą dysponuje badacz, podpowiada mu, że pierwsza funkcja jest ekspresją bardziej ogólnego, latentnego wymiaru, który roboczo można nazwać konserwatywno-tradycjonalistyczną wizją świata społecznego. Druga funkcja wydaje się obejmować szerszy psychologiczny syndrom, odnoszący się do spostrzeganego przez jednostkę poziomu własnej kontroli (poznawczej, ewaluatywnej i behawioralnej) nad otaczającą ją rzeczywistością społeczno-polityczną. Przy takiej interpretacji, wysokie wartości drugiej funkcji oznaczają uprzedmiotowienie, a niskie upodmiotowienie jednostki.

Jak się mają przedstawione powyżej interpretacje do informacji, które zawiera trzecia funkcja? Niestety, wyznaczające ją współczynniki brutalnie burzą opisaną przed chwilą elegancką koncepcję, wedle której badacze wykryli dwa ogólne, ortogonalne względem siebie wymiary: konserwatywno-tradycjonalistyczny światopogląd i upodmiotowienie *vs.* uprzedmiotowienie jednostki w świecie społecznym. Efekty charakterystyczne dla pierwszej lub drugiej funkcji, w trzeciej łączą się ze sobą, tworząc konfiguracje, których istnienie, w kontekście interpretacji dwóch pierwszych funkcji, należałoby wykluczyć. Okazuje się, że wartości tej funkcji są największe dla osób konserwatywnych i autorytarnych, ale z kolei najniższe u nosicieli postaw nacjonalistycznych; z drugiej strony, funkcja ta rośnie wraz ze wzrostem anomii i alienacji, ale maleje, gdy wzrasta poziom politycznej paranoi. Wygląda więc na to, że kluczowe pytanie, które muszą sobie teraz zadać badacze brzmi: czy wszystkie funkcje są jednakowo ważne?

Jednym z najczęściej stosowanych kryteriów oceny mocy dyskryminacyjnej kilku funkcji jest porównanie ich wartości własnych (stosunek między- do wewnątrzgrupowych sum kwadratów). Kiedy zmienna grupująca składa się z więcej niż dwóch grup, wartość własna wyraża odsetek całkowitej wariancji międzygrupowej wyjaśnianej przez daną funkcję (dla dwóch grup jest to zawsze 100%). Ponieważ kanoniczne funkcje dyskryminacyjne są wyodrębniane w taki sposób, że połączona wariancja wewnątrzgrupowa wynosi 1 (por. analiza wariancji w Tabeli 5), różnią się one jedynie wielkością wariancji międzygrupowej (średnia międzygrupowej sumy kwadratów). W każdym modelu analizy dyskryminacyjnej pierwsza funkcja wiąże największy odsetek wariancji międzygrupowej, a kolejne sukcesywnie coraz mniej. Z Tabeli 10 odczytujemy, że w omawianym badaniu odsetki te wynoszą kolejno 64,1 (funkcja 1), 33,2 (funkcja 2) oraz 2,7 (funkcja 3).

Wartości własne i ich procentowy udział w ogólnej wariancji międzygrupowej to informacje pozwalające stwierdzić, które funkcje mają z punktu widzenia badacza istotne znaczenie empiryczne. Zdecydowanie największą moc dyskryminacyjną posiada funkcja pierwsza (konserwatywno-tradycjonalistyczny światopogląd), udział drugiej funkcji (upodmiotowienie *vs.* uprzedmiotowienie jednostki) w wyjaśnianiu różnic międzygrupowych, choć wyraźnie mniejszy, jest również bardzo duży, natomiast znaczenie trzeciej jest marginalne.

Tabela 9.
Współczynniki dyskryminacyjne i macierz struktury

	Współczynniki funkcji dyskryminacyjnej (B)			Standaryzowane współczynniki funkcji dyskryminacyjnej (β)			Macierz struktury		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Anomia	0,02	1,06	0,31	0,01	0,90	0,26	0,06	0,75	0,34
Alienacja	0,04	0,02	0,12	0,04	0,02	0,12	0,12	0,40	0,14
Autorytaryzm	0,46	–0,33	0,53	0,42	–0,26	0,47	0,64	–0,10	0,42
Konserwatyzm	0,32	–0,04	0,67	0,33	–0,04	0,64	0,48	–0,06	0,50
Paranoja	0,27	0,71	–0,51	0,25	0,63	–0,45	0,19	0,45	–0,24
Nacjonalizm	1,03	0,06	–1,05	0,69	0,04	–0,71	0,78	–0,08	–0,38
(stała)	–6,17	–4,96	–0,41						

Tabela 10.
Analiza wariancji i statystyki funkcji dyskryminacyjnej

Wartości własne				
Funkcja	Wartość własna	% wariancji	% skumulowany	Korelacja kanoniczna
1	2,93	64,1	64,1	0,86
2	1,52	33,2	97,3	0,78
3	0,12	2,7	100	0,33
Lambda Wilksa				
Test funkcji	Lambda Wilksa	Chi^2	df	p
1 przez 3	0,09	178,22	18	< 0,001
2 przez 3	0,35	76,91	10	< 0,001
3	0,89	8,52	4	= 0,074

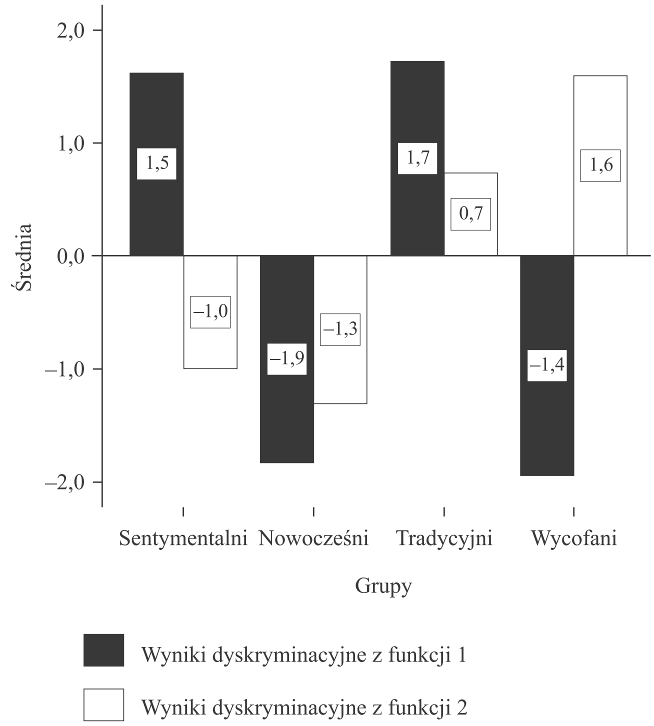
Te szacunki znajdują dodatkowe wsparcie w wielkościach współczynników towarzyszących wartościom własnym funkcji (Tabela 10). Korelacje kanoniczne – wynoszące kolejno 0,86, 0,76 i 0,33 – podniesione do kwadratu pokazują, że zmienna grupująca wyjaśnia aż 74% pierwszej, 46% drugiej i tylko 11% trzeciej funkcji.

W tym miejscu konieczna jest pewna uwaga. Choć można odnieść wrażenie, że pierwsza funkcja dyskryminacyjna ma zawsze bardzo dużą korelację kanoniczną, nie jest to prawda. Pomimo że w każdym przypadku będzie ona miała relatywnie największą moc, jej związek ze zmienną grupującą może być *de facto* bardzo słaby. Jeżeli zmienne dyskryminujące nie różnicują zbyt dobrze badanych grup, korelacje kanoniczne będą niewielkie.

Zanim badacz podejmie ostateczne decyzje dotyczące interpretacji poszczególnych funkcji i oceny ich mocy dyskryminacyjnej, powinien poddać je weryfikacji testem istotności statystycznej. Statystyka λ Wilksa, której wartości pokazuje dolna część Tabeli 10, pozwala testować hipotezę zerową, mówiącą, że średnie grupowe wyodrębnionych funkcji na poziomie populacji są sobie równe. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, właściwy test istotności statystycznej opiera się na przekształceniu λ w statystykę χ^2. Inaczej jednak niż w przykładzie dla dwóch grup, λ nie jest prostym ilorazem wewnątrzgrupowej i całkowitej sumy kwadratów dla pojedynczej funkcji. Kiedy mamy więcej niż jedną funkcję, sekwencyjna procedura testu λ Wilksa ma następujący przebieg: w pierwszym kroku testowane są różnice pomiędzy średnimi grupowymi ze wszystkich funkcji jednocześnie (można je, analogicznie jak w metodzie MANOVA, nazwać wektorami średnich); w drugim kroku różnice pomiędzy średnimi grupowymi dwóch funkcji jednocześnie, po wyłączeniu pierwszej; a w trzecim kroku różnice między średnimi grupowymi trzeciej funkcji, po wyłączeniu pierwszej i drugiej. Pozwala to badaczowi ograniczyć zbiór interesujących go funkcji do takich, które wyjaśniają różnice międzygrupowe oraz, co za tym idzie, odrzucić te funkcje, które nie odzwierciedlają rzeczywistych różnic w populacji, a jedynie losowe efekty wariancji w próbie.

Wynikiem pierwszego testu jest $\lambda = 0{,}09$, przyjmująca wartość χ^2 poniżej krytycznego poziomu istotności 0,001. Pozwala to odrzucić hipotezę zerową, mówiącą, że w populacji średnie grupowe wszystkich trzech funkcji są równe. Po wyłączeniu efektu pierwszej funkcji, łączny test średnich grupowych dwóch pozostałych daje wartość $\lambda = 0{,}35$, z $\chi^2 = 76{,}9$ poniżej krytycznego poziomu istotności 0,001. I wreszcie w trzecim kroku, po wyłączeniu efektów dwóch pierwszych funkcji, test średnich grupowych dla funkcji trzeciej okazuje się nieistotny statystycznie ($\lambda = 0{,}89$; $\chi^2 = 8{,}5$; $p = 0{,}07$). Otrzymany tu poziom istotności statystycznej wskazuje, że funkcja ta nie wnosi już praktycznie żadnego wkładu w model wyjaśniający różnice między grupami[5].

Podjąwszy decyzję o odrzuceniu trzeciej funkcji jako bezużytecznej, badacz może wrócić do interpretacji różnic międzygrupowych w oparciu o dwie pierwsze. Co takiego mówią one o czterech grupach osób badanych? Rysunek 3 przedstawia średnie grupowe (centroidy) obu funkcji w poszczególnych grupach. Średnie te, przypomnijmy, wskazują w jednostkach odchylenia standardowego odległość przeciętnych wartości grupowych obu funkcji od tzw. wielkiego centroidu. Układ średnich w sposób bardzo klarowny wyjaśnia różnice międzygrupowe. Funkcja pierwsza, tłumacząca największą porcję wariancji międzygrupowej, opisuje przekonania konserwatywno-tradycjonalistyczne. Wartości centroidów wskazują, że przekonania takie w jednakowym stopniu charakteryzują dwie grupy: Sentymentalnych i Tradycyjnych, natomiast zdecydowanie odrzucają je Nowocześni



Rysunek 3.
Średnie funkcji dyskryminacyjnej w centroidach.

i Wycofani. Druga funkcja pokazuje jednak, że wprawdzie Sentymentalni i Tradycyjni nie różnią się światopoglądem, ale wyraźnie dzieli ich poziom spostrzeganej kontroli nad otaczającą rzeczywistością – pierwsi mają zdecydowanie większe poczucie własnej podmiotowości, drudzy czują się uprzedmiotowieni. Podobnie jest z Nowoczesnymi i Wycofanymi – choć nie dzielą ich kwestie światopoglądowe, pierwsi deklarują najwyższy, a drudzy najniższy poziom poczucia podmiotowości. Widzimy więc, że obie funkcje dyskryminacyjne wyznaczają wymiary, które w pewnych kombinacjach mogą addytywnie powiększać dystans między grupami (np. Wycofani – Sentymentalni), a w innych jednocześnie zbliżać je do siebie i oddalać (np. Nowocześni – Sentymentalni).

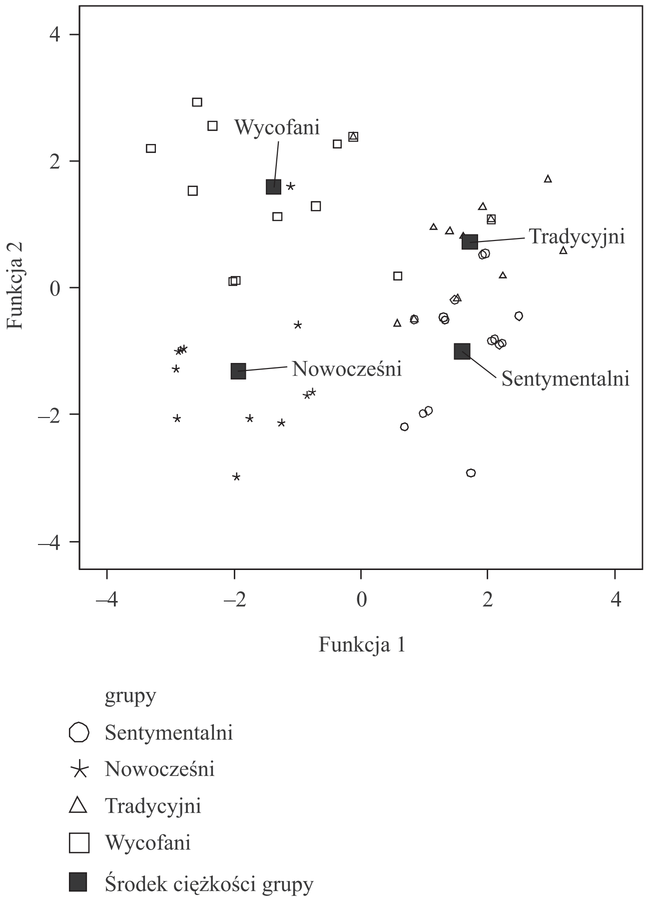
Oprócz statystyk przedstawionych w Tabeli 10, do oceny efektywności całego modelu warto wykorzystać tabelę klasyfikacji (Tabela 11). Tak jak w przykładzie pierwszym, jej przekątną wyznaczają klatki z obserwacjami właściwie przyporządkowanymi do grup. Całkowity odsetek poprawnie zaklasyfikowanych obserwacji jest nieco mniejszy niż w pierwszym badaniu i wynosi 85%. Na podstawie funkcji dyskryminacyjnych i reguły Bayesa w 80-osobowej próbie właściwie zaklasyfikowano 16 osób Sentymentalnych (80%), 18 Nowoczesnych (90%), 17 Tradycyjnych (85%) i 17 Wycofanych (85%). Ogółem model „pomylił” się w przypadku 12 osób (15%).

Zauważmy, że odsetek poprawnych klasyfikacji w pierwszym badaniu jest znacząco większy niż w drugim (odpowiednio 92% i 85%). Jest to jednak tylko i wyłącznie przewaga w liczbach bezwzględnych. Losowe prawdopodobieństwo poprawnego zaklasyfikowania wszystkich obserwacji wynosi bowiem nie 0,5, lecz 0,25. Wynika z tego, że na podstawie prawdopodobieństwa *a priori* $P(G_i)$ możemy trafnie przewidzieć przynależność grupową 25% osób badanych. Kiedy model analizy dyskryminacyjnej zwiększa odsetek poprawnie zaklasyfikowanych obserwacji do 85%, efektywność przewidywania opartego na funkcji dyskryminacyjnej jest, w porównaniu z samym tylko $P(G_i)$, większa o 60% (w przykładzie pierwszym „tylko” o 42%).

Wizualizację modelu z czterema grupami przedstawia Rysunek 4. Najważniejszym jego elementem jest poło-

Tabela 11.
Wyniki klasyfikacji

Grupy			Przewidywana przynależność do grupy				Ogółem
			Sentymentalni	Nowocześni	Tradycyjni	Wycofani	
Oryginalne	Liczebność	Sentymentalni	16	0	4	0	20
		Nowocześni	0	18	0	2	20
		Tradycyjni	2	0	17	1	20
		Wycofani	2	0	1	17	20
	%	Sentymentalni	80	0	20	0	100
		Nowocześni	0	90	0	10	100
		Tradycyjni	10	0	85	5	100
		Wycofani	10	0	5	85	100



Rysunek 4.
Średnie funkcji dyskryminacyjnej w centroidach.

żenie centroidów grupowych względem współrzędnych przedstawiających pierwszą i drugą funkcję. Wokół każdego z tych najbardziej typowych dla danej grupy punktów koncentrują się obserwacje należące do odpowiadających im grup. Choć wykres w dużym stopniu powiela informacje przedstawione na Rysunku 3 (dotyczące interpretacji samej istoty różnic międzygrupowych), w kilku przynajmniej aspektach jest znacznie lepszym narzędziem diagnostycznym. Przede wszystkim pokazuje jak na dłoni, że funkcje dyskryminacyjne w tym modelu bardzo dobrze separują cztery badane grupy – ich skupiska zajmują wyraźnie odrębne terytoria. Poza tym na podstawie Rysunku 4 łatwo dostrzec, które grupy tworzą najbardziej, a które najmniej zwarte, homogeniczne skupiska. Tutaj najbardziej jednorodną grupą wydają się Nowocześni, co jest zgodne z Tabelą 11, pokazującą, że w grupie tej model dokonał najmniej błędnych klasyfikacji. I na koniec być może najważniejsza informacja. Wykres bardzo sugestywnie poucza: nawet jeśli opracowany przez badacza model jest bardzo efektywny, nie znaczy to wcale, że jednakowo dobrze różnicuje wszystkie grupy. W tym przypadku grupy, które relatywnie najmniej się różnią, to Sentymentalni i Tradycyjni. Ich grupowe kontury wyraźnie nakładają się na siebie, co jest graficznym potwierdzeniem faktu (por. Tabela 11), że aż połowa błędnych klasyfikacji zdarzyła się właśnie pomiędzy tymi grupami (4 osoby Sentymentalne przyporządkowane do Tradycyjnych i 2 Tradycyjne przyporządkowane do Sentymentalnych).

Uwagi końcowe

Ze względu na cele tego artykułu, a także ograniczenia formalne związane z jego długością, nie wszystkie istotne kwestie dotyczące zarówno budowy modelu funkcji dyskryminacyjnej, jak i jego aplikacji, mogły być potraktowane wystarczająco szczegółowo. Dwie z nich, pominięte w poprzednich częściach tekstu, są jednak na tyle ważne, że wymagają podkreślenia i szerszego omówienia przynajmniej w części końcowej. Pierwsza dotyczy konsekwencji naruszania podstawowych założeń statystycznych, na których opiera się matematyczny aparat całego modelu; druga porusza problem optymalnego doboru zmiennych dyskryminacyjnych.

Najważniejsze i jednocześnie najtrudniejsze do spełnienia są założenia o wielozmiennowym rozkładzie normalnym zmiennych dyskryminujących i o równości macierzy kowariancji w grupach. Na szczęście wielu autorów (np. Lachenbruch, 1975: za Klecka, 1981) pokazało, że analiza dyskryminacyjna jest techniką dość odporną na względnie niewielkie odchylenia od tych założeń. Ponadto nie wszystkie jej elementy wymagają ich spełnienia w jednakowym stopniu.

Wielozmiennowy rozkład normalny jest postulatem kluczowym dla rzetelności testów istotności statystycznej. Opierają się one na porównaniach statystyk otrzymanych w próbie z ich teoretycznymi rozkładami opracowanymi przy założeniu wielozmiennowego rozkładu normalnego w populacji. Jeśli populacja go nie spełnia, rzeczywisty rozkład statystyki z próby będzie odbiegał od rozkładu teoretycznego. Różnice te mogą być bardzo duże albo stosunkowo małe. Lachenbruch (1975) pokazał, że model analizy dyskryminacyjnej nie jest szczególnie wrażliwy, kiedy założenie o rozkładzie normalnym zostanie naruszone w niewielkim stopniu. Skutkuje to jednak zawsze mniejszym lub większym spadkiem jego efektywności i dokładności.

Założenie o normalności rozkładu jest ściśle powiązane z precyzją reguł klasyfikacji wykorzystujących wielkości prawdopodobieństw *a posteriori*. Oblicza się je na podstawie statystyki χ^2, która jest wiarygodnym estymatorem prawdopodobieństwa, pod warunkiem że zmienne dyskryminacyjne mają wielozmiennowy rozkład normalny. Przeszacowane wartości prawdopodobieństw dla jednych grup, a niedoszacowanie dla innych, prowadzi do zniekształcenia reguł klasyfikacji i wzrostu liczby błędnie przyporządkowanych obserwacji.

Opracowano szereg testów statystycznych pozwalających zweryfikować to założenie. Jednak najprostszą metodą, którą badacz może zastosować, jest wykonanie serii niezależnych testów rozkładu normalnego pojedynczych zmiennych. Kiedy łączny rozkład zmiennych ma kształt krzywej normalnej, oznacza to, że kształt rozkładu każdej z osobna jest także zbliżony do normalnego. Dlatego, jeżeli jedna ze zmiennych dyskryminujących ma rozkład znacząco odbiegający od normalnego, można sądzić, że ich łączny rozkład także będzie odbiegał od krzywej normalnej. Z drugiej strony, nawet jeśli wszystkie zmienne spełniają to założenie, nie przesądza to, że będzie tak w przypadku rozkładu łącznego.

Brak równości macierzy kowariancji w grupach może skutkować zniekształceniami współczynników funkcji dyskryminacyjnych i reguł klasyfikacji. Potencjalnym źródłem błędów jest procedura szacowania wewnątrzgrupowej macierzy kowariancji (macierz W). Zawiera ona estymatory wspólnych (równych) kowariancji grupowych w populacji. Macierz W można estymować także wtedy, gdy kowariancje grupowe nie są równe, ale wówczas nie spełnia ona swoich podstawowych funkcji, polegających na upraszczaniu matematycznych formuł obliczeniowych. W rezultacie, funkcje dyskryminacyjne mogą mniej efektywnie tłumaczyć różnice pomiędzy grupami, a szacunkowe prawdopodobieństwa przynależności grupowej będą obciążone większym błędem. Ponieważ trudno jest wskazać procedury niwelujące ten problem w obrębie klasycznego modelu analizy dyskryminacyjnej, niektórzy autorzy (np. Klecka, 1981) sugerują, aby prawdopodobieństwa grupowe szacować na podstawie kowariancji w grupach (metoda ta nazywana bywa kwadratową funkcją dyskryminacyjną).

Spośród kilku narzędzi pozwalających na testowanie równości kowariancji grupowych najczęściej stosowany jest test Boxa (dostępny także w programie SPSS). Standardowo wartość tego testu jest przekształcana na statystykę F, z odpowiadającym jej poziomem istotności statystycznej. W przypadku testu Boxa postulat równości macierzy kowariancji w grupach stanowi hipotezę zerową, a więc badaczowi zależy na tym, aby ją utrzymać, a nie odrzucić. Jeśli poziom istotności otrzymanej statystyki jest niższy od konwencjonalnie przyjętego poziomu krytycznego (0,05 lub 0,01), hipotezę zerową należy odrzucić, co jest równoznaczne ze stwierdzeniem braku równości kowariancji grupowych. Warto jednak pamiętać, że kiedy liczebności grup są duże, poziom istotności może okazać się niższy od wartości krytycznej, nawet wówczas, gdy grupowe kowariancje różną się bardzo niewiele. Ponadto test Boxa jest wrażliwy na odchylenia od wielozmianowego rozkładu normalnego. Ma wtedy tendencję do odrzucania hipotezy zerowej (czyli do stwierdzania nierówności kowariancji).

W sytuacji gdy różnice pomiędzy macierzami kowariancji nie są zbyt duże, model liniowej funkcji dyskryminacyjnej działa zadowalająco. Kiedy jednak osiągają niepokojące rozmiary, warto rozważyć zastosowanie alternatywnej metody. Zazwyczaj najlepszą z nich jest tzw. regresja logistyczna, działająca na podstawie modelu, który nie wymaga spełnienia aż tak restrykcyjnych założeń. Wykorzystuje się jej dwie odmiany: dwukategorialną – dla dwóch grup i wielomianową – dla trzech i więcej grup.

Przejdźmy teraz do problemu optymalnego doboru zmiennych niezależnych. Badacze dość często dysponują zbiorem potencjalnych zmiennych dyskryminujących, nie mając jednocześnie pewności, czy wszystkie one są potrzebne. Na ogół zdarza się tak, kiedy przesłanki teoretyczne nie pozwalają na precyzyjną specyfikację listy predyktorów. W rezultacie badacz decyduje się na pomiar zmiennych, które jedynie podejrzewa o silne związki ze zmienną grupującą. Może też się zdarzyć, że badanie ma charakter czysto eksploracyjny, ukierunkowany na odkrycie efektywnych predyktorów. W jednym i drugim przypadku trzeba spodziewać się różnych komplikacji. Niektóre zmienne mogą być mało użyteczne ze względu na niewielkie różnice średnich w podgrupach. Ponadto może się okazać, że dwie (lub więcej) zmienne zawierają ten sam zasób informacji, nawet jeśli każda z osobna jest dobrym dyskryminatorem. Jednoczesne umieszczenie w modelu spowoduje, że efekty niektórych z nich okażą się redundantne, pozbawione wystarczająco dużej dozy swoistego, unikalnego wkładu. Jeśli nie ma uzasadnionych powodów, żeby mimo wszystko zatrzymać je w modelu, zmienne słabo dyskryminujące lub redundantne należy eliminować.

Efektywnym i najpopularniejszym sposobem eliminacji niepotrzebnych zmiennych jest metoda selekcji krokowej. Procedura rozpoczyna się od wyboru i wprowadzenia do modelu zmiennej posiadającej największą bezwzględną moc dyskryminacyjną. W kolejnym kroku zmienna ta tworzy wszystkie możliwe pary z pozostałymi zmiennymi, w celu wyszukania takiej dwuzmiennowej kombinacji, która dyskryminuje silniej niż inne. Do modelu zostaje włączona zmienna tworząca optymalną parę z pierwszą zmienną. W trzecim kroku selekcja postępuje według tych samych zasad. W modelu znajduje się trzecia zmienna tworząca optymalną kombinację z pierwszą i drugą. Proces selekcji trwa tak długo, aż w równaniu funkcji dyskryminacyjnej pojawią się wszystkie dostępne zmienne albo do momentu, kiedy okaże się, że wśród zmiennych czekających na swoją kolej nie ma już takich, które mają wystarczająco silny autonomiczny efekt. Warto jednak pamiętać, że o ile o uzyskanym w rezultacie selekcji krokowej zbiorze zmiennych dyskryminujących możemy powiedzieć, że jest optymalny, o tyle niekoniecznie musi on tworzyć najlepszą z możliwych kombinacji (takie przypadki należą jednak do rzadkości).

LITERATURA CYTOWANA

Colley, W. W., Lohnes, P. R. (1971). *Multivariate data analysis.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Fisher, R. (1936). The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of Eugenics*, *7*, 179–188.

Johnson, R. A., Wichern, D. W. (1992). *Applied multivariate statistical analysis*. New Jersey: Prentice-Hall.

Klecka, W. R. (1981). *Discriminant analysis*. Beverly Hills: Sage Publications.

Lachenbruch, P. A. (1975). *Discriminant analysis*. New York: Hafner Press.

Norusis, M. J. (1994). *SPSS Professional Statistics 6.1*. Chicago: SPSS Inc.

PRZYPISY

1. Określenie „kanoniczna" nawiązuje do bliskich związków analizy dyskryminacyjnej i tzw. analizy kanonicznej.

2. Kiedy liczba zmiennych dyskryminujących, p, jest mniejsza niż liczba grup, maksymalna liczba funkcji, q, jest równa *p.* W tym przypadku mamy do czynienia nie tyle z przekształceniem jakiejś wielowymiarowej przestrzeni w przestrzeń składającą się z mniejszej liczby wymiarów, ile raczej z relokacją osi, tak aby ich położenie spełniało interesujące badacza kryteria.

3. Obliczenia zostały wykonane w pakiecie statystycznym PASW Statistics (SPSS) 18. Również w prezentacji tabel i wykresów wykorzystałem standardowe elementy wydruku programu SPSS dla analizy dyskryminacyjnej.

4. Współczynnik korelacji kanonicznej jest produktem techniki statystycznej znanej jako analiza korelacji kanonicznej. Jest to metoda badania związków pomiędzy dwoma odrębnymi zbiorami zmiennych ilościowych. Ponieważ, jak wcześniej wspomniałem, funkcja dyskryminacyjna bywa nazywana kanoniczną funkcją dyskryminacyjną, warto pokrótce wyjaśnić na czym polega podobieństwo obu metod. Analiza kanoniczna polega na utworzeniu k par liniowych kombinacji, gdzie k oznacza liczbę zmiennych w mniejszym zbiorze. Liniowe kombinacje w danej parze (każda z jednego zbioru) znajduje się w taki sposób, aby maksymalizowały korelacje pomiędzy nimi. Pierwsza para jest najsilniej skorelowana; druga przedstawia największą możliwą korelację, pod warunkiem że nie jest skorelowana z pierwszą i tak dalej. Jeśli zmienna grupująca ma dwie grupy, korelacja kanoniczna jest po prostu odpowiednikiem korelacji r-Pearsona pomiędzy wynikiem dyskryminacyjnym i zmienną grupującą. Kiedy grup jest więcej, powstaje k – 1 zmiennych instrumentalnych (gdzie k to liczba grup), których związki ze zbiorem predyktorów badane są w oparciu o procedurę analizy kanonicznej.

5. Warto pamiętać, że nawet istotna statystycznie λ Wilksa w gruncie rzeczy niesie bardzo mało informacji na temat efektywności funkcji dyskryminacyjnej w fazie klasyfikacji obserwacji. Jest to jedynie test hipotezy zerowej o równości średnich w populacji. Niekiedy nawet niewielkie różnice mogą być istotne statystycznie, co wcale nie oznacza, że są dobrym narzędziem dyskryminacji pomiędzy grupami.

Discriminant analysis.
Basic assumptions and applications in social research

Piotr Radkiewicz

Institute for Social Studies, University of Warsaw

Abstract

This article is dedicated to the discriminant analysis – a statistical method that allows to test differences between groups of observations (two or more), based on a set of selected independent variables (predictors). It may be effectively applied to various fields of social sciences and practice (psychology, sociology, political science, economy, law). Linear combination of independent variables, obtained on a basis of the discriminant analysis model, serves as a criterion of assigning observations to different groups. Information carried by an independent variables is saved in a synthetic form as discriminant function scores. Discriminant analysis may have two goals: discrimination (separation) and classification (allocation). In the first case, a researcher tries to explain causes of differences between groups of observations by making use of their characteristics available as “disciriminating” variables. In the second case, a researcher seeks to find a mathematical equation, that combines observation’s group characteristics in order to effectively predict the unknown group category to which an observation belongs. First part of the article contains a general description of the statistical model; the second one includes two empirical examples of its application – for two and for four groups of observations.

Key words: discriminant analysis, grouping variable, linear discriminant function, group centroids, classification, observed and predicted group membership

Złożono do druku: 21.04.2010
Złożono poprawiony tekst: 13.09.2010
Zaakceptowano do druku: 13.09.2010